

Systemes oscillants

Boucles à verrouillage de phase (PLL)
et systemes quantiques

Pierre Rouchon

Mines ParisTech
Centre Automatique et Systemes
Mathematiques et Systemes
pierre.rouchon@mines-paristech.fr

<http://cas.ensmp.fr/~rouchon/index.html>

ENS Cachan Bretagne: 24 septembre 2008

Plan

Moyennisation et approximation séculaire d'ordre deux

Boucle à verrouillage de phase (PLL : Phase Locked Loop)

Systemes quantiques à deux niveaux

Fonction d'onde et équation de Schrödinger

Approximation du champ tournant et oscillations de Rabi

Déplacement lumineux de Bloch-Siegert

Invariant adiabatique

Systemes quantiques à trois niveaux : transition Raman

Conclusion et références

Moyennisation à une fréquence ($0 \leq \varepsilon \ll 1$)

Considérons le système perturbé

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

avec f régulière et de période T par rapport à t . Il existe un changement de variables

$$x = \bar{x} + \varepsilon w(\bar{x}, t)$$

avec w de période T en t , tel que

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \bar{f}(\bar{x}) + \varepsilon^2 f_1(\bar{x}, t, \varepsilon)$$

avec

$$\bar{f}(\bar{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\bar{x}, t, 0) dt$$

et f_1 régulière de période T en t .

Le système moyen (calcul au 1er ordre) est alors $\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \bar{f}(\bar{x})$.

Ici $x = \bar{x} + 0(\varepsilon)$.

Calcul au second ordre¹

On pose $x = \bar{x} + \delta x$ avec \bar{x} non oscillant $O(1)$ et δx oscillant moyenne nulle et $O(\varepsilon)$: $\frac{d}{dt}\bar{x} + \frac{d}{dt}\delta x = \varepsilon f(\bar{x} + \delta x, t, \varepsilon)$. Avec $f(\bar{x} + \delta x, t, \varepsilon) = f(\bar{x}, t, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t, \varepsilon)\delta x + O(\varepsilon^2)$ on a

$$\frac{d}{dt}\bar{x} + \frac{d}{dt}\delta x = \varepsilon f(\bar{x}, t, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t, \varepsilon)\delta x + O(\varepsilon^3).$$

"Identification" des termes oscillants du même ordre :

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \varepsilon(f(\bar{x}, t, \varepsilon) - \bar{f}(\bar{x}, \varepsilon))$$

Intégration avec $\bar{x} = cte$

$$\delta x = \varepsilon \int_0^t (f(\bar{x}, \tau, \varepsilon) - \bar{f}(\bar{x}, \varepsilon)) d\tau + \varepsilon c(\bar{x}, \varepsilon)$$

où la constant d'intégration $c(\bar{x}, \varepsilon)$ est choisie pour que la moyenne sur une période de δx (vue comme une fonction de $(\bar{x}, t, \varepsilon)$) soit nulle.

1. Voir le calcul de Kapitsa dans le Landau-Lifshitz, p.147, tome 1. 

Calcul au second ordre (fin)

En prenant la moyenne sur une période de l'EDO qui reste pour \bar{x} .

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = \varepsilon \bar{f}(\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t, \varepsilon) \delta x(\bar{x}, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^3),$$

on obtient l'approximation du second ordre directement :

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = \varepsilon \bar{f}(\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{f}_1(\bar{x}, \varepsilon)$$

avec $x = \bar{x} + \delta(\bar{x}, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ et

$$\varepsilon \bar{f}_1(\bar{x}, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t, \varepsilon) \delta x(\bar{x}, t, \varepsilon) dt.$$

Cette méthode directe permet, pour les systèmes quantiques, d'obtenir les décalages lumineux et les transitions Raman (transitions à deux photons \equiv calcul au second ordre)².

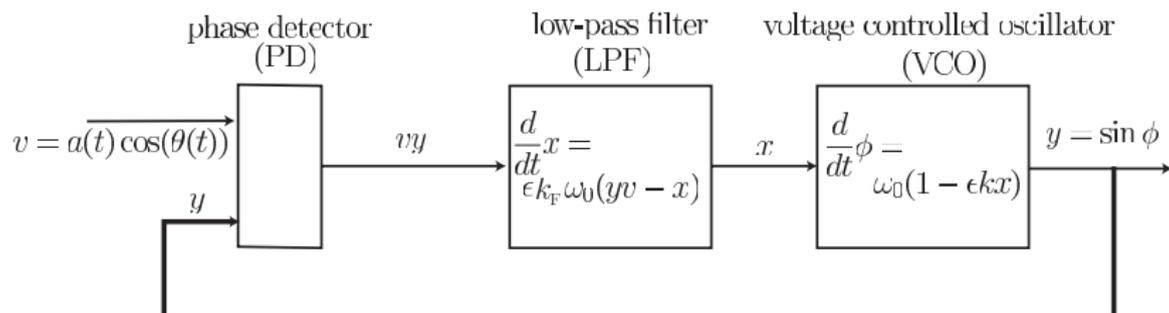
2. Pour un exposé plus détaillé de ce calcul au second ordre, voir : P. Rouchon : Quantum Systems and Control. To appear in a special issue of Arima (proceedings of the Conference in Honor of Claude Lobry, September 2007).

Moyennisation à une fréquence (stabilité asymptotique)

- ▶ Si $x(t)$ et $z(t)$ sont, respectivement, solutions du système perturbé et du système moyen, avec comme conditions initiales x_0 et z_0 telles que $\|x_0 - z_0\| = O(\varepsilon)$, alors $\|x(t) - z(t)\| = O(\varepsilon)$ sur un intervalle de temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.
- ▶ Si \bar{z} est un point fixe hyperbolique du système moyen, alors il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}]$, le système perturbé admette une unique orbite périodique hyperbolique $\gamma_\varepsilon(t)$, proche de \bar{z} , $\gamma_\varepsilon(t) = \bar{z} + O(\varepsilon)$, qui peut être réduite à un point, et dont la stabilité est du même type que celle de \bar{z} ³. En particulier, si \bar{z} est asymptotiquement stable, alors γ_ε est aussi asymptotiquement stable et l'approximation, à $O(\varepsilon)$ près, des trajectoires du système perturbé par celles du système moyen devient valable pour $t \in [0, +\infty[$.

3. Le nombre des multiplicateurs caractéristiques de γ_ε de module strictement inférieur (resp. supérieur) à 1 est égal au nombre d'exposants caractéristiques de \bar{z} à partie réelle < 0 (resp. > 0).

Boucle à verrouillage de phase (PLL)



La quantité $\omega_0(1 - \epsilon k x)$ est une estimation filtrée de la fréquence $\frac{d}{dt} \theta$ du signal d'entrée v qui peut être très fortement bruité et dont l'amplitude a n'est pas connue.

$$\frac{d}{dt} x = \epsilon k_f \omega_0 (v(t) \sin \phi - x), \quad \frac{d}{dt} \phi = \omega_0 (1 - \epsilon k x)$$

où ϵ est un petit paramètre positif, k_f et k deux gains positifs.

On pose $v(t) = a \cos \theta$ avec $\frac{d}{dt} \theta = \omega_0(1 + \epsilon p)$ où $a > 0$ et p sont des paramètres inconnus mais constants (voir simulation Scilab/Scicos).

PLL : la dynamique moyenne

Comme $2 \cos \theta \sin \phi = \sin(\phi - \theta) + \sin(\phi + \theta)$, avec $\Delta = \phi - \theta$
et $\sigma = \phi + \theta$, le système

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon k_f \omega_0 (a \cos \theta \sin \phi - x), \quad \frac{d}{dt}\phi = \omega_0(1 - \epsilon kx), \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega_0(1 + \epsilon p)$$

devient dans l'échelle de temps σ ($\frac{d}{dt}\sigma = \omega_0(2 + \epsilon(p - kx))$)

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \frac{\frac{a}{2} \sin \Delta + \frac{a}{2} \sin \sigma - x}{2 + \epsilon(p - kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \frac{p + kx}{2 + \epsilon(p - kx)}.$$

Le système moyen est

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \frac{\frac{a}{2} \sin \Delta - x}{2 + \epsilon(p - kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \frac{p + kx}{2 + \epsilon(p - kx)}.$$

PLL : stabilité asymptotique en moyenne

On néglige des termes d'ordre 2 en ϵ et on prend comme système moyen :

$$\frac{d}{d\sigma}x = \frac{\epsilon k_f}{2} \left(\frac{a}{2} \sin \Delta - x \right), \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\frac{\epsilon}{2} (p + kx).$$

Ce système s'écrit aussi sous la forme d'une seule équation du second ordre avec $\sigma/\varsigma = \epsilon\sqrt{k_f ka/8}$

$$\frac{d^2}{d\varsigma^2}\Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} \frac{d}{d\varsigma}\Delta - \left(\sin \Delta - \frac{2p}{ak} \right).$$

On choisit le **gain k assez grand** pour que $\left| \frac{2p}{ak} \right| < 1$. Ainsi on pose $\sin \bar{\Delta} = \frac{2p}{ak}$ avec $\bar{\Delta} \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ce système admet donc **deux points d'équilibre** (angle défini à 2π près) :

- ▶ $\Delta = \pi - \bar{\Delta} \pmod{2\pi}$ est un **col** (deux valeurs propres réelles de signes opposés)
- ▶ $\Delta = \bar{\Delta} \pmod{2\pi}$ est **localement asymptotiquement stable** (deux valeurs propres à partie réelle strictement négative).

PLL : stabilité asymptotique en moyenne (fin)

$\frac{d^2}{d\zeta^2} \Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} \frac{d}{d\zeta} \Delta - \left(\sin \Delta - \frac{2p}{ak} \right)$ avec Δ dans le cercle unité \mathbb{S}^1 (système du premier ordre sur le cylindre $(\Delta, \frac{d\Delta}{d\sigma}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$).

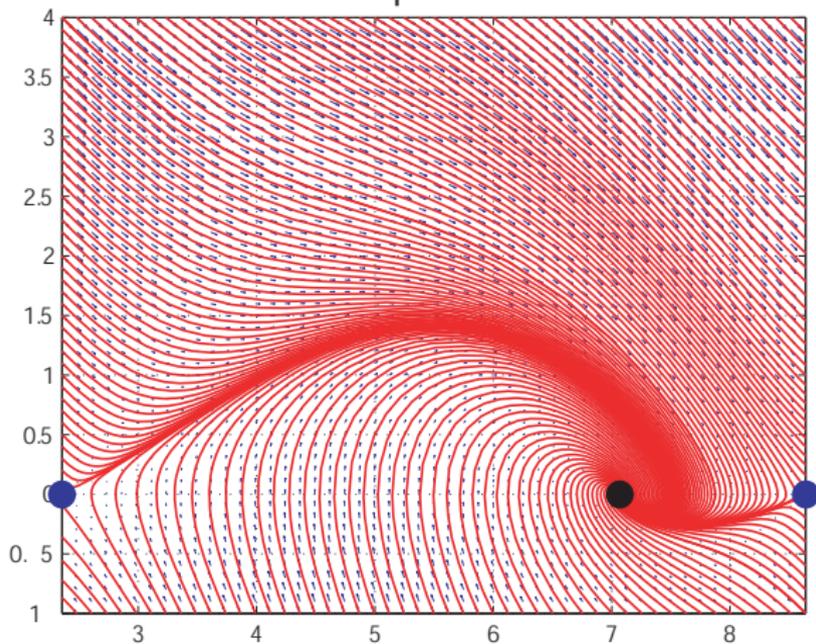
On reprend en partie les arguments utilisés pour le PI avec anti-emballement :

- ▶ Le calcul de la **divergence du champ de vecteur** dans les coordonnées $(\Delta, \Omega = \frac{d\Delta}{d\sigma})$ donne $-\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} < 0$. Les **trajectoires sont bornées** dans le cylindre (la vitesse est bornée).
- ▶ Ainsi, il ne peut y avoir **au plus qu'une seule orbite périodique** et de plus elle fait un tour autour du cylindre.
- ▶ Pour k et k_f assez grands, on a deux points d'équilibre et on n'a pas d'orbite périodique (**bifurcation globale** fondée sur l'espace rentrant du col $\pi - \bar{\Delta}$ qui en se confondant avec l'espace sortant (orbite homocline) détruit un cycle limite).

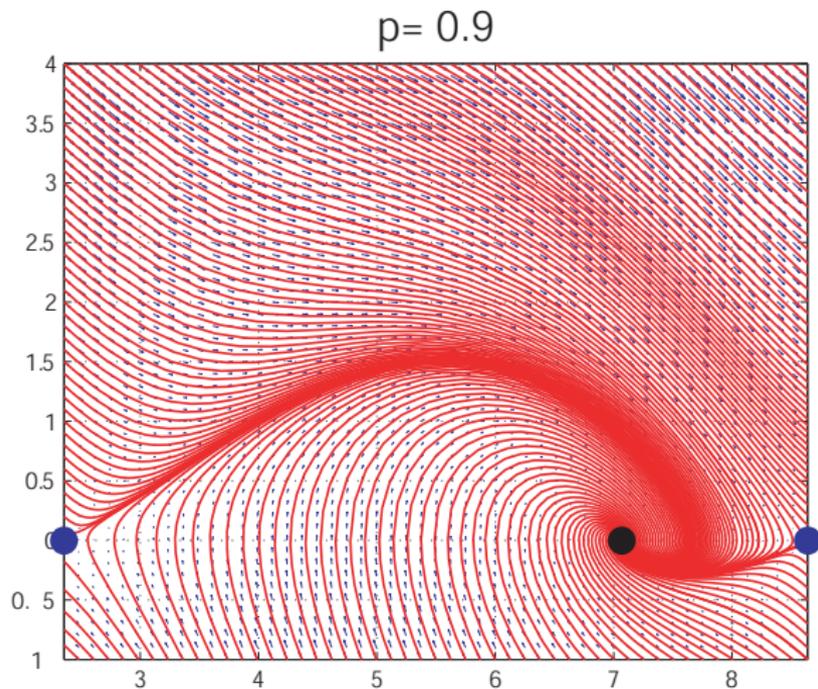
En résumé : pour k et k_f assez grands $\Delta = \phi - \theta$ converge vers une constante (le point $\bar{\Delta}$: c'est le **verrouillage de phase**).

Bifurcation globale $\frac{d^2}{dt^2} \Delta = -p \frac{d}{dt} \Delta - \sin \Delta + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$p=1$

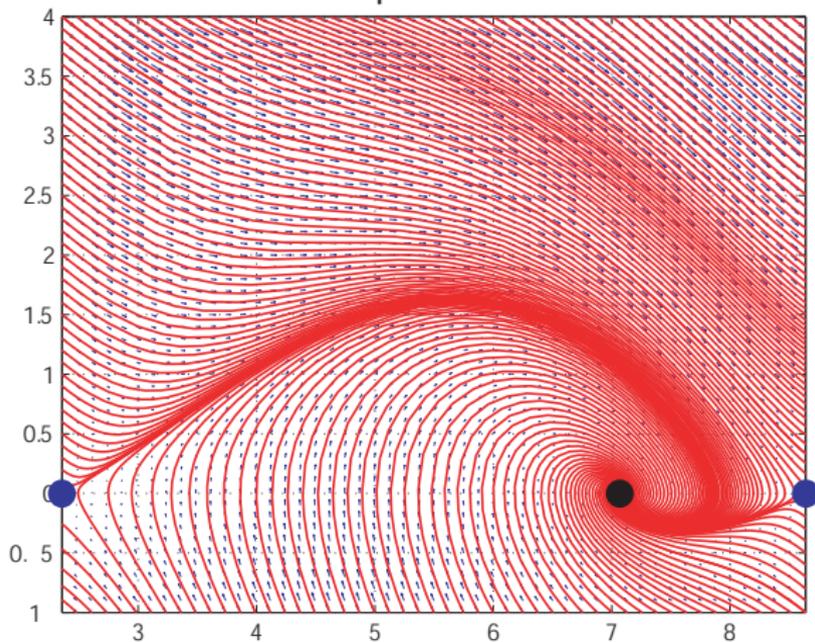


Un seul régime asymptotique : équilibre

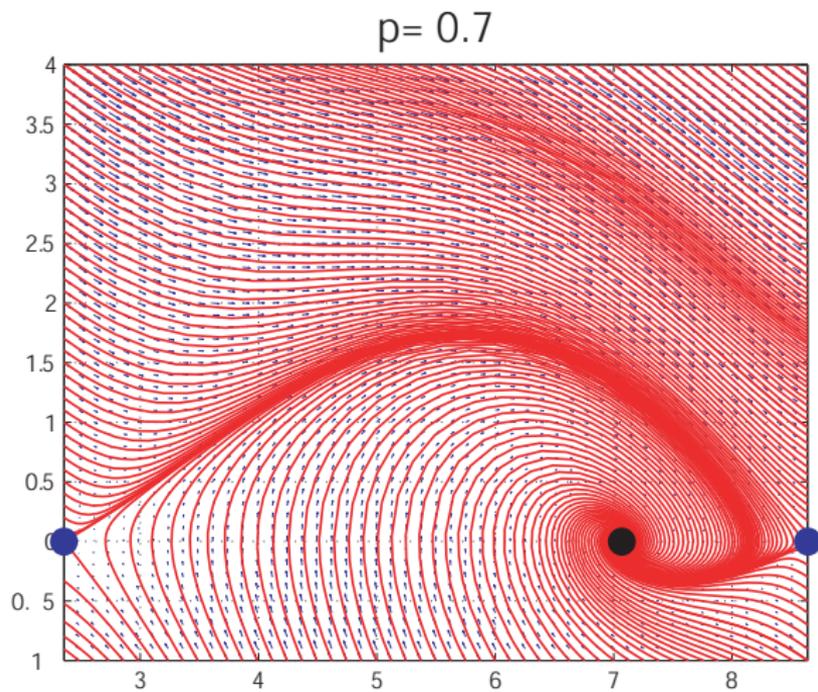


Un seul régime asymptotique : équilibre

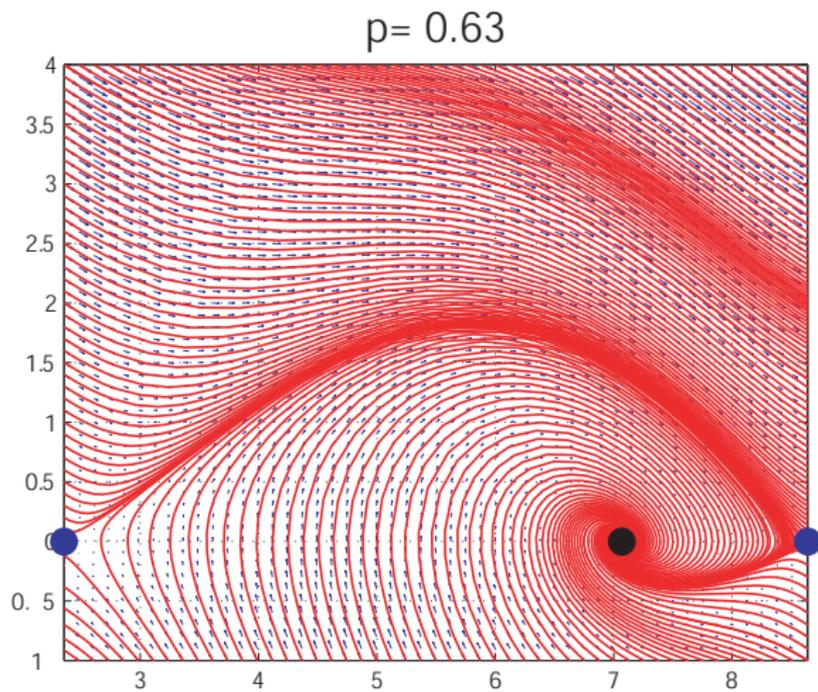
$p = 0.8$



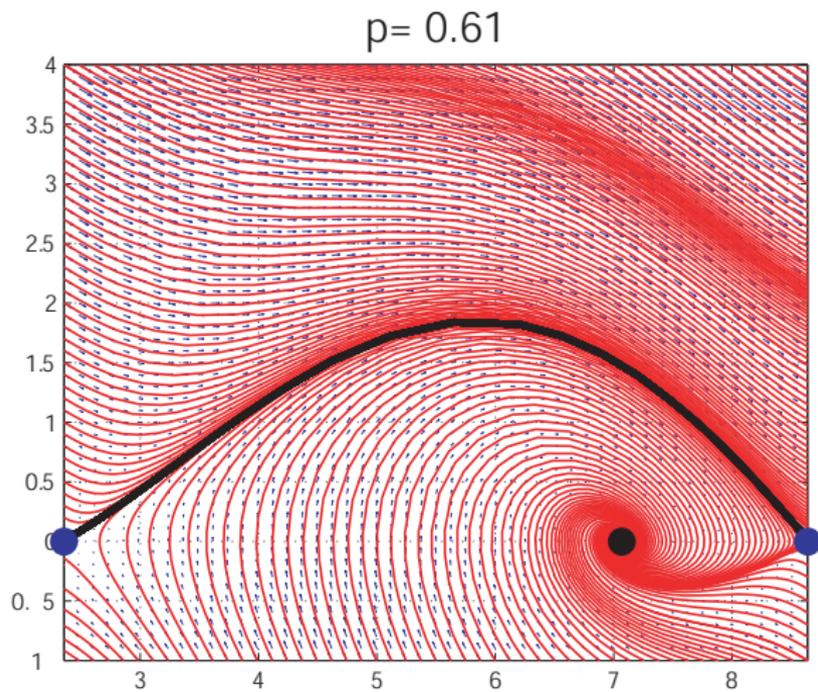
Un seul régime asymptotique : équilibre



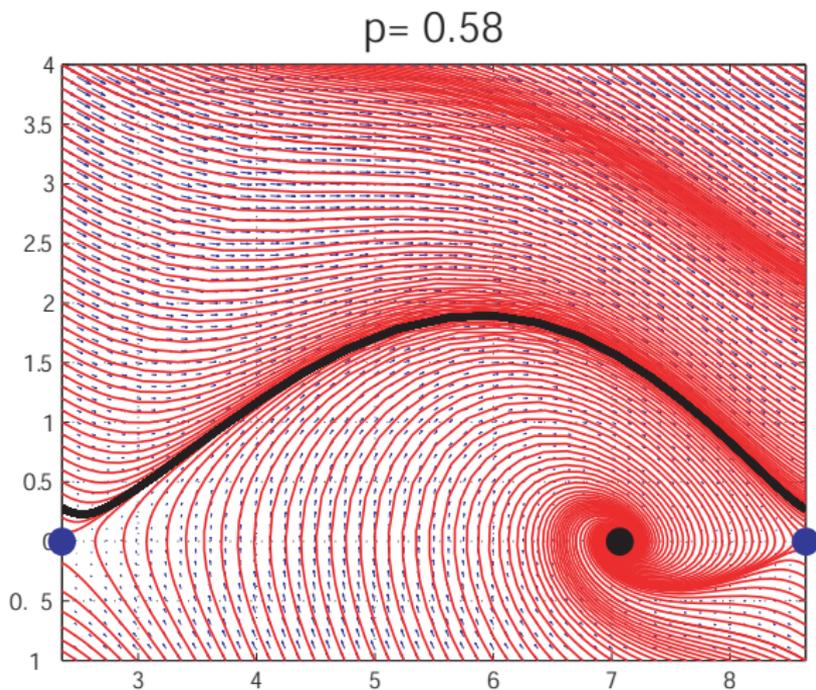
Un seul régime asymptotique : équilibre



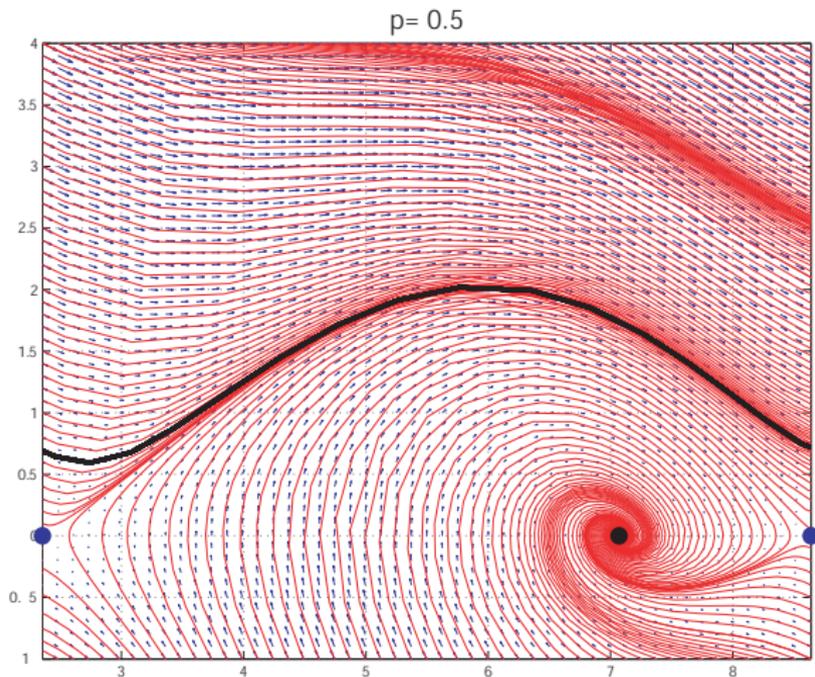
Bifurcation globale : un cycle limite apparaît (orbite homocline)



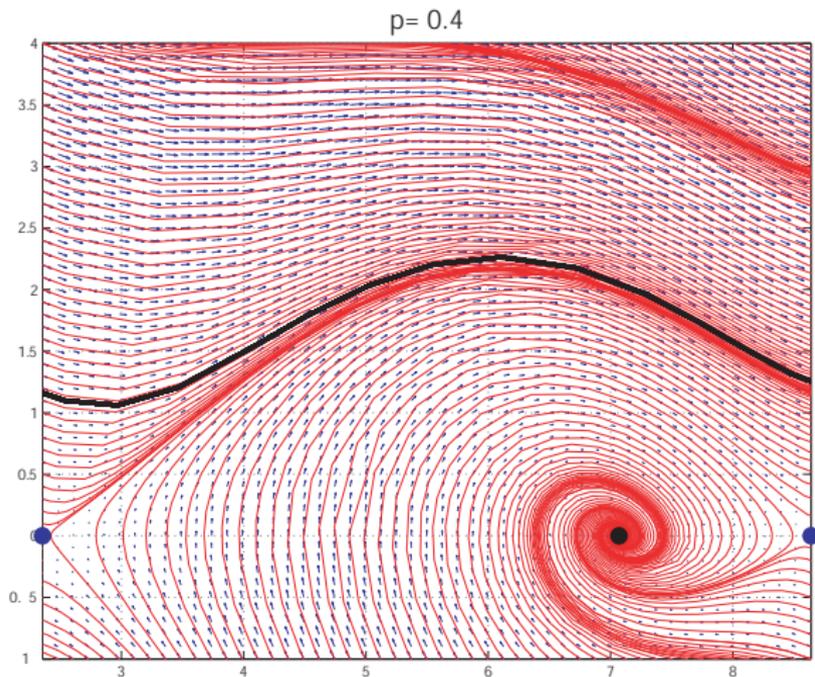
Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



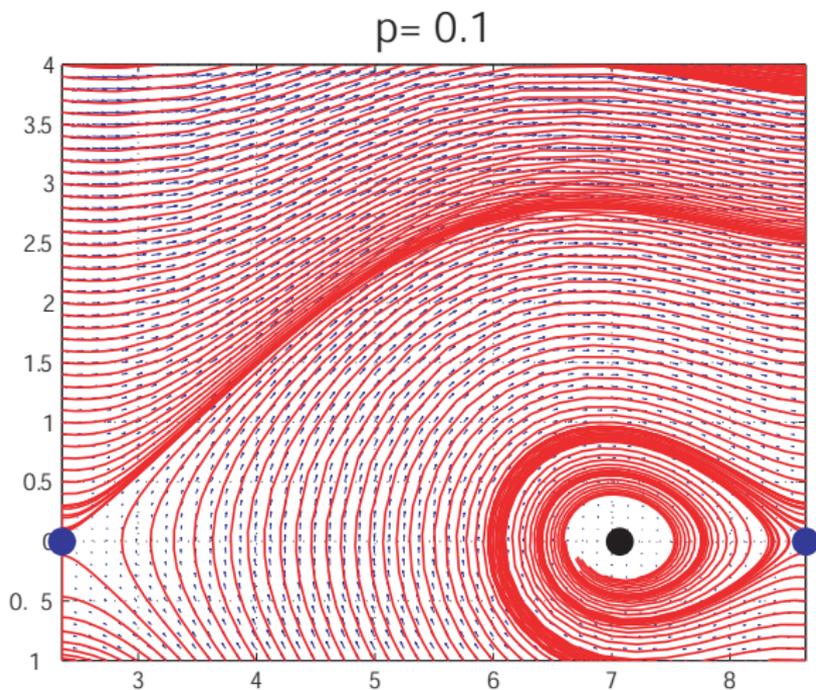
Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Système quantique à deux niveaux : amplitudes de probabilités et états quantiques

- ▶ Bra $\langle \bullet |$ et Ket $|\bullet\rangle$: un vecteur $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ s'écrit $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$ avec $\psi_g, \psi_e \in \mathbb{C}$ et

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$|\psi\rangle$ amplitude complexe de probabilité : $|\psi_g|^2 + |\psi_e|^2 = 1$.

- ▶ On parle aussi de **qubit** pour désigner un système à deux états. Un qubit est donc représenté par $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$. Convention de l'informatique quantique : $|1\rangle = |g\rangle$ et $|0\rangle = |e\rangle$.
- ▶ Conjuguée hermitienne : $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \psi_g^* \langle g| + \psi_e^* \langle e|$
- ▶ Produit hermitien : $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$, $|\phi\rangle = \phi_g |g\rangle + \phi_e |e\rangle$, on a

$$\langle\psi|\phi\rangle = \psi_g^* \phi_g + \psi_e^* \phi_e.$$

- ▶ Opérateur hermitien : toute matrice 2×2 hermitienne $M = M^\dagger$ s'écrit

$$M = m_g |g\rangle \langle g| + m_e |e\rangle \langle e| + m |e\rangle \langle g| + m^* |g\rangle \langle e|$$

avec $m_g, m_e \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{C}$.

- ▶ Supposons que $M = -|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|$ et que l'on dispose d'un grand nombre n de qubits ayant le même état $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$. Pour chaque qubit on mesure M :
 1. la mesure est -1 et alors, juste après la mesure, le qubit est dans l'état $|g\rangle$;
 2. la mesure est $+1$ et alors, juste après la mesure, le qubit est dans l'état $|e\rangle$.

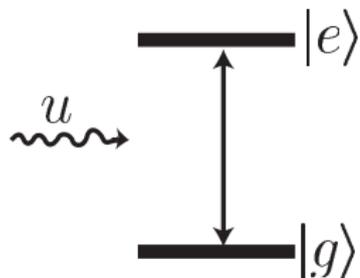
On note n_g (resp. n_e) le nombre de fois que l'on a mesuré -1 (resp. $+1$). Alors, pour N grand, on a

$$\frac{n_g}{n_g + n_e} \approx |\psi_g|^2, \quad \frac{n_e}{n_g + n_e} \approx |\psi_e|^2$$

(cohérent avec $n = n_g + n_e$ et $|\psi_g|^2 + |\psi_e|^2 = 1$). La valeur moyenne de ces n mesures est donc $-|\psi_g|^2 + |\psi_e|^2$.

- ▶ Plus généralement, la mesure M de l'état quantique $|\psi\rangle$ donne en moyenne $\langle \psi | M | \psi \rangle$.

Systèmes à deux niveaux (spin 1/2)



Electron autour d'un atome dans l'état fondamental $|g\rangle$ d'énergie E_g ou dans l'état excité $|e\rangle$ d'énergie E_e . Plus généralement, son état quantique $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ est une superposition linéaire $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$ qui évolue selon Schrödinger (ψ_g et ψ_e dépendent de t).

Equation de Schrödinger pour le système isolé à deux niveaux :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle = (E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|) |\psi\rangle$$

où H est l'opérateur Hamiltonien (auto-adjoint $H^\dagger = H$) correspondant à l'énergie.

L'énergie est définie à une constante près : H et $H + \varpi(t)I$ où $\varpi(t) \in \mathbb{R}$ est arbitraire correspondent au même système physique. Si $|\psi\rangle$ vérifie $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$ alors $|\chi\rangle = e^{-i\vartheta(t)} |\psi\rangle$ avec $\frac{d}{dt} \vartheta = \frac{\varpi}{\hbar}$ vérifie aussi $i\hbar \frac{d}{dt} |\chi\rangle = (H + \varpi I) |\chi\rangle$. Ainsi pour tout ϑ , $|\psi\rangle$ et $e^{-i\vartheta} |\psi\rangle$ représentent le même système physique : la **phase globale** de l'état quantique $|\psi\rangle$ n'a pas de sens physique et **peut être choisie arbitraire**.

Couplage à un champ électromagnétique

Avec une origine des énergies telle que E_g (resp. E_e) devient $-\frac{E_e-E_g}{2}$ (resp. $\frac{E_e-E_g}{2}$) et en posant $\Omega = \frac{E_e-E_g}{\hbar}$ la solution du système isolé $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \frac{H}{\hbar} |\psi\rangle = \frac{\Omega}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) |\psi\rangle$ est

$$|\psi\rangle_t = \psi_{g0} e^{\frac{i\Omega t}{2}} |g\rangle + \psi_{e0} e^{-\frac{i\Omega t}{2}} |e\rangle.$$

Avec un champ électromagnétique variable classique décrit par $u(t) \in \mathbb{R}$, l'évolution cohérente (conservative) est toujours donnée par Schrödinger mais avec l'Hamiltonien **contrôlé**

$$\frac{H(t)}{\hbar} = \frac{\Omega}{2} \sigma_z + \frac{u(t)}{2} \sigma_x = \frac{\Omega}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) + \frac{u(t)}{2} (|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|)$$

L'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$ s'écrit :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_g \end{pmatrix} = \frac{\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_g \end{pmatrix} + \frac{u(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_g \end{pmatrix}.$$

Les matrices de Pauli vérifient $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$, ..., avec

$$\sigma_x = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|, \quad \sigma_y = -i |e\rangle \langle g| + i |g\rangle \langle e|, \quad \sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$$

Matrices de Pauli et quelques exponentielles

$$\sigma_x^2 = I, \sigma_x \sigma_y = i \sigma_z, \dots, \text{ avec}$$

$$\sigma_x = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|, \sigma_y = -i |e\rangle \langle g| + i |g\rangle \langle e|, \sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$$

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$

- ▶ Comme $e^{i\theta\sigma_x} = \cos \theta + i \sin \theta \sigma_x$ (idem pour σ_y et σ_z), la solution de $i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \frac{\Omega}{2} \sigma_z |\psi\rangle$ est

$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i\Omega t}{2} \sigma_z} |\psi\rangle_0 = \left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \sigma_z \right) |\psi\rangle_0$$

- ▶ Pour $\alpha, \beta = x, y, z, \alpha \neq \beta$ on a

$$\sigma_\alpha e^{i\theta\sigma_\beta} = e^{-i\theta\sigma_\beta} \sigma_\alpha, \quad \left(e^{i\theta\sigma_\alpha} \right)^{-1} = \left(e^{i\theta\sigma_\alpha} \right)^\dagger = e^{-i\theta\sigma_\alpha}.$$

et aussi

$$e^{-\frac{i\theta}{2}\sigma_\alpha} \sigma_\beta e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_\alpha} = e^{-i\theta\sigma_\alpha} \sigma_\beta = \sigma_\beta e^{i\theta\sigma_\alpha}$$

Matrice densité et sphère de Bloch

On part de $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle$ qui vérifie $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$. On considère le projecteur orthogonal $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, dit **opérateur densité**. Alors ρ est un opérateur auto-adjoint ≥ 0 , vérifie $\text{tr}(\rho) = 1$, $\rho^2 = \rho$ et obéit à l'équation :

$$\frac{d}{dt} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho].$$

Pour un système à deux niveaux, on a l'écriture suivante

$$\rho = \frac{I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z}{2}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ représentant le vecteur \vec{M} qui évolue sur la **sphère de Bloch** (longueur 1 car $\text{tr}(\rho^2) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$) :

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = (u\vec{i} + \Omega\vec{k}) \times \vec{M},$$

une autre écriture de $\frac{d}{dt} \rho = -i \left[\frac{\Omega}{2} \sigma_z + \frac{u}{2} \sigma_x, \rho \right]$. u est la **vitesse de rotation instantanée** autour de l'axe des x et Ω celle autour de l'axe des z .

Approximation du champ tournant et moyennisation

Dans $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \left(\frac{\Omega}{2}\sigma_z + \frac{u}{2}\sigma_x\right)|\psi\rangle$, on pose $|\psi\rangle = e^{-\frac{i\Omega t}{2}\sigma_z}|\phi\rangle$ (passage au repère d'interaction) pour éliminer le drift :

$$i\frac{d}{dt}|\phi\rangle = \frac{u}{2}e^{\frac{i\Omega t}{2}\sigma_z}\sigma_x e^{-\frac{i\Omega t}{2}\sigma_z}|\phi\rangle = \frac{H_{int}}{\hbar}|\phi\rangle$$

$$\text{avec } \frac{H_{int}}{\hbar} = \frac{u}{2}e^{i\Omega t} \overbrace{\frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2}}^{\sigma^+ = |e\rangle\langle g|} + \frac{u}{2}e^{-i\Omega t} \overbrace{\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}}^{\sigma^- = |g\rangle\langle e|}$$

Contrôle résonnant $u = \mathbf{u}e^{i\Omega t} + \mathbf{u}^*e^{-i\Omega t}$ avec \mathbf{u} amplitude complexe lentement variable $|\frac{d}{dt}\mathbf{u}| \ll \Omega|\mathbf{u}|$. L'approximation du champ tournant consiste à négliger les termes oscillant à la pulsation 2Ω de moyenne nulle (licite si $|\mathbf{u}| \ll \Omega$)

$$\frac{H_{int}}{\hbar} = \left(\frac{\mathbf{u}e^{2i\Omega t} + \mathbf{u}^*}{2}\right)\sigma^+ + \left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^*e^{-2i\Omega t}}{2}\right)\sigma^- \approx \frac{\mathbf{u}^*\sigma^+ + \mathbf{u}\sigma^-}{2}.$$

Justification : application du théorème de moyennisation.

Système moyen et oscillations de Rabi

$$i \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \frac{(\mathbf{u}^* \sigma^+ + \mathbf{u} \sigma^-)}{2} |\phi\rangle = \frac{(\mathbf{u}^* |e\rangle \langle g| + \mathbf{u} |g\rangle \langle e|)}{2} |\phi\rangle$$

On suppose $\mathbf{u} = \omega_r e^{i\theta}$ avec $\omega_r > 0$ et θ réels. Alors

$$\frac{\mathbf{u}^* \sigma^+ + \mathbf{u} \sigma^-}{2} = \frac{\omega_r}{2} (\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y)$$

et le système oscille entre $|e\rangle$ et $|g\rangle$ avec la **pulsation de Rabi** $\frac{\omega_r}{2}$. Comme $(\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y)^2 = I$ et donc

$$e^{-\frac{i\omega_r t}{2} (\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y)} = \cos \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) (\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y),$$

la solution de $\frac{d}{dt} |\phi\rangle = \frac{-i\omega_r}{2} (\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y) |\phi\rangle$ est

$$|\phi\rangle_t = \cos \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) |g\rangle - i \sin \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) e^{-i\theta} |e\rangle, \quad \text{quand } |\phi\rangle_0 = |g\rangle,$$

$$|\phi\rangle_t = \cos \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) |e\rangle - i \sin \left(\frac{\omega_r t}{2} \right) e^{i\theta} |g\rangle, \quad \text{quand } |\phi\rangle_0 = |e\rangle,$$

Pulses $\pi/2$ et π , planification de trajectoires

On part toujours de l'état fondamental $|\phi\rangle_0 = |g\rangle$ et on allume le laser avec une amplitude $\mathbf{u} = i\frac{\omega_r}{2}$ complexe uniquement sur $[0, T]$ (pulse de longueur T). Comme

$$|\phi\rangle_T = \cos\left(\frac{\omega_r T}{2}\right) |g\rangle + \sin\left(\frac{\omega_r T}{2}\right) |e\rangle,$$

on voit que

- ▶ si $\omega_r T = \pi$ (pulse π) alors $|\phi\rangle_T = |e\rangle$ et donc on bascule sur l'état excité : absorption stimulée de un photon et passage à l'état excité. Si on mesure l'énergie dans cet état on trouve toujours E_e .
- ▶ si $\omega_r T = \pi/2$ (pulse $\pi/2$) alors $|\phi\rangle_T = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ et le système est dans une **superposition cohérente** de $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Si on mesure l'énergie dans cet état, on trouve E_g une fois sur deux.

Ordre deux et déplacement lumineux de Bloch-Siegert

Si $|\mathbf{u}| \ll \Omega$ n'est plus bien vérifié il faut calculer les **corrections du premier ordre** en $\frac{1}{\Omega}$. On les obtient en décomposant $|\phi\rangle = |\bar{\phi}\rangle + |\delta\phi\rangle$ où $|\bar{\phi}\rangle$ est d'ordre 0 et évolue lentement ($\frac{d}{dt} |\bar{\phi}\rangle$ d'ordre 0) et où $|\delta\phi\rangle$ est d'ordre 1, oscille rapidement ($\frac{d}{dt} |\delta\phi\rangle$ d'ordre 0) et sa moyenne est nulle :

$$i \frac{d}{dt} (|\bar{\phi}\rangle + |\delta\phi\rangle) = \left(\left(\frac{\mathbf{u} e^{2i\Omega t} + \mathbf{u}^*}{2} \right) \sigma^+ + \left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^* e^{-2i\Omega t}}{2} \right) \sigma^- \right) (|\bar{\phi}\rangle + |\delta\phi\rangle)$$

et on identifie les **termes oscillants à l'ordre 0** :

$$i \frac{d}{dt} |\delta\phi\rangle = \frac{\mathbf{u} e^{2i\Omega t}}{2} \sigma^+ |\bar{\phi}\rangle + \mathbf{u}^* \frac{e^{-2i\Omega t}}{2} \sigma^- |\bar{\phi}\rangle$$

Ainsi $|\delta\phi\rangle = -\frac{\mathbf{u} e^{2i\Omega t}}{4\Omega} \sigma^+ |\bar{\phi}\rangle + \mathbf{u}^* \frac{e^{-2i\Omega t}}{4\Omega} \sigma^- |\bar{\phi}\rangle$. La moyenne de

$$i \frac{d}{dt} |\bar{\phi}\rangle = \frac{\mathbf{u} e^{2i\Omega t} + \mathbf{u}^*}{2} \sigma^+ |\delta\phi\rangle + \frac{\mathbf{u}^*}{2} \sigma^+ |\bar{\phi}\rangle + \frac{\mathbf{u}^* e^{-2i\Omega t} + \mathbf{u}}{2} \sigma^- |\delta\phi\rangle + \frac{\mathbf{u}}{2} \sigma^- |\bar{\phi}\rangle$$

donne alors le **système moyen à des termes d'ordre 2 près** :

$$i \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \underbrace{\frac{|\mathbf{u}|^2}{8\Omega} \sigma_z}_{\text{Bloch-Siegert}} |\phi\rangle + \frac{\mathbf{u}}{2} \sigma^- |\phi\rangle + \frac{\mathbf{u}^*}{2} \sigma^+ |\phi\rangle$$

Approximation adiabatique

- ▶ Soient deux matrices auto-adjointes $n \times n$: H_0 et H_1 . Pour $u \in \mathbb{R}$ on pose $H(u) := H_0 + u H_1$. Alors pour chaque u il existe une **base orthonormée** $(|\phi_k^u\rangle)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ de \mathbb{C}^n de vecteurs propres de $H(u)$ dont la **dépendance par rapport à u est analytique**.
- ▶ Pour $0 < \epsilon \ll 1$, on considère la solution $[0, \frac{1}{\epsilon}] \ni t \mapsto |\psi\rangle_t^\epsilon$ de $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle_t^\epsilon = (H_0 + u(\epsilon t) H_1) |\psi\rangle_t^\epsilon$ où $u(s)$ est une fonction régulière de $s \in [0, 1]$. Si, pour $s \in [0, 1]$, le **spectre** de $H(u(s))$ est **non dégénéré**, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\nu > 0$ tel que, $\forall \epsilon \in]0, \nu]$, $\forall t \in [0, \frac{1}{\epsilon}]$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \left| \langle \psi_t^\epsilon | \phi_k^{u(\epsilon t)} \rangle \right|^2 - \left| \langle \psi_0^\epsilon | \phi_k^{u(0)} \rangle \right|^2 \right| \leq \eta$$

- ▶ La solution de $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H(t/T)\psi$ suit la décomposition spectrale de H : si $|\psi\rangle$ démarre en $t = 0$ dans l'état fondamental et si $u(0) = u(1)$ alors $|\psi\rangle$ revient en $t = T$ sur le même état fondamental (à une phase globale près).

Invariant adiabatique et retournement de spin en RMN

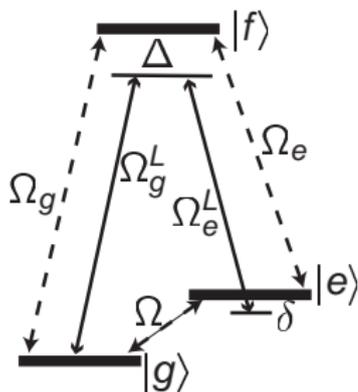
- ▶ On prend le modèle sur la sphère de Bloch, $\frac{d}{dt}\vec{M} = (\vec{u}\vec{i} + \vec{v}\vec{j} + \vec{w}\vec{k}) \times \vec{M}$ où $\vec{B} = (\vec{u}\vec{i} + \vec{v}\vec{j} + \vec{w}\vec{k})$ est un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 qui est le contrôle (en RMN c'est le champ magnétique). On pose $\omega = \sqrt{\vec{B}^2}$ et $\vec{B} = \omega\vec{b}$ où \vec{b} est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . Ainsi on a

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \omega\vec{b} \times \vec{M}, \quad \text{contrôle : } \omega \in \mathbb{R}^{+*}, \vec{b} \in \mathbb{S}^2.$$

Le contrôle varie lentement, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\omega = \omega(\varepsilon t) > 0$, $\vec{b} = \vec{b}(\varepsilon t)$ et à $t = 0$, $\vec{M}_0 = \vec{b}(0)$. Alors, $\vec{M}(t) \approx \vec{b}(\varepsilon t)$: **M suit adiabatiquement le vecteur \vec{b}** . Si \vec{b} fait un demi tour, alors \vec{M} fera aussi un demi-tour.

- ▶ **Justification** : on repasse en $|\psi\rangle$ avec comme équation de Schrödinger $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \left(\frac{u}{2}\sigma_x + \frac{v}{2}\sigma_y + \frac{w}{2}\sigma_z\right)|\psi\rangle$; la condition initiale $\vec{M}_0 = \vec{b}(0)$ correspond pour $|\psi\rangle_0$ à l'état fondamental de $\frac{u(0)}{2}\sigma_x + \frac{v(0)}{2}\sigma_y + \frac{w(0)}{2}\sigma_z$.

Système à trois états et transition Raman



Pas de couplage via u entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Fréquences atomiques :

$$\Omega_g = \frac{E_f - E_g}{\hbar}, \quad \Omega_e = \frac{E_f - E_e}{\hbar}, \quad \Omega = \frac{E_e - E_g}{\hbar}.$$

Pulsations laser : Ω_g^L, Ω_e^L avec :

$$\Delta = \Omega_g - \Omega_g^L, \quad \delta = \Omega - (\Omega_g^L - \Omega_e^L).$$

Hypothèses de **non résonance au 1^{er} ordre** :

$$|\delta| \ll |\Delta|, \quad |\Delta \pm \Omega| \ll \Omega_g, \Omega_e.$$

L'état $|\psi\rangle = \psi_g |g\rangle + \psi_e |e\rangle + \psi_f |f\rangle$ suit (μ_g, μ_e paramètres) :

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left(\frac{E_g}{\hbar} |g\rangle \langle g| + \mu_g u (|g\rangle \langle f| + |f\rangle \langle g|) + \frac{E_e}{\hbar} |e\rangle \langle e| + \mu_e u (|e\rangle \langle f| + |f\rangle \langle e|) + \frac{E_f}{\hbar} |f\rangle \langle f| \right) |\psi\rangle$$

avec u réel, $u = \mathbf{u}_g e^{i\Omega_g^L t} + \mathbf{u}_e e^{i\Omega_e^L t} + c.c.$ où les **amplitudes complexes** \mathbf{u}_g et \mathbf{u}_e vérifient $|\frac{d}{dt} \mathbf{u}_g| \ll |\Delta| |\mathbf{u}_g|$, $|\frac{d}{dt} \mathbf{u}_e| \ll |\Delta| |\mathbf{u}_e|$ et $|\mu_g \mathbf{u}_g|, |\mu_e \mathbf{u}_g|, |\mu_g \mathbf{u}_e|, |\mu_e \mathbf{u}_e| \ll |\Delta|, |\Delta \pm \Omega|$.

Hamiltonien Raman

Dans le repère d'interaction (passage de $|\psi\rangle$ à $|\phi\rangle$),

$$|\psi\rangle = \left(e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} |g\rangle \langle g| + e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} |e\rangle \langle e| + e^{-\frac{iE_f t}{\hbar}} |f\rangle \langle f| \right) |\phi\rangle$$

l'Hamiltonien devient $\frac{H_{int}}{\hbar}$ (c.c. pour complexe conjugué) :

$$\begin{aligned} & \mu_g \left(\mathbf{u}_g e^{i\Omega_g^L t} + \mathbf{u}_e e^{i\Omega_e^L t} + c.c. \right) \left(e^{i\Omega_g t} |g\rangle \langle f| + e^{-i\Omega_g t} |f\rangle \langle g| \right) \\ & + \mu_e \left(\mathbf{u}_g e^{i\Omega_g^L t} + \mathbf{u}_e e^{i\Omega_e^L t} + c.c. \right) \left(e^{i\Omega_e t} |e\rangle \langle f| + e^{-i\Omega_e t} |f\rangle \langle e| \right) \end{aligned}$$

On "moyennise" les termes tournant à $\Omega_\xi^L + \Omega_\zeta$ ($\xi, \zeta = g, e$) pour avoir l'**Hamiltonien effectif** $\frac{H_{eff}}{\hbar}$ (h.c. pour hermitien conjugué) :

$$\begin{aligned} & \mu_g \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_g)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_g)t} \right) |f\rangle \langle g| + h.c. \\ & + \mu_e \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_e)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_e)t} \right) |f\rangle \langle e| + h.c. \end{aligned}$$

Hamiltonien Raman (suite)

A cause de l'hypothèse de non résonance, les pulsations

$$\Omega_g - \Omega_g^L = \Delta, \quad \Omega_g - \Omega_e^L = \Delta + \Omega - \delta, \quad \Omega_e - \Omega_g^L = \Delta - \Omega, \quad \Omega_e - \Omega_e^L = \Delta - \delta$$

sont toutes grandes par rapport à δ et dès que $|\mu_\xi \mathbf{u}_\zeta| \ll |\Delta|$ ($\xi, \zeta = g, e$).

Ainsi, tout oscille à haute fréquence dans l'Hamiltonien effectif

$$\begin{aligned} \frac{H_{\text{eff}}}{\hbar} = & \mu_g \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_g)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_g)t} \right) |f\rangle \langle g| + h.c. \\ & + \mu_e \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_e)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_e)t} \right) |f\rangle \langle e| + h.c. \end{aligned}$$

et en moyenne on a 0. Il faut donc aller au second ordre pour avoir un effet. On reprend alors la méthode utilisée pour le calcul du shift de Bloch-Siegert en décomposant $|\phi\rangle = |\bar{\phi}\rangle + |\delta\phi\rangle$. On trouve que $|\delta\phi\rangle$ vaut

$$\begin{aligned} & \mu_g \left(\frac{\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_g)t}}{\Omega_g^L - \Omega_g} + \frac{\mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_g)t}}{\Omega_e^L - \Omega_g} \right) |g\rangle \langle f|\bar{\phi}\rangle - \mu_g \left(\frac{\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_g)t}}{\Omega_g^L - \Omega_g} + \frac{\mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_g)t}}{\Omega_e^L - \Omega_g} \right) |f\rangle \langle g|\bar{\phi}\rangle \\ & + \mu_e \left(\frac{\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_e)t}}{\Omega_g^L - \Omega_e} + \frac{\mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_e)t}}{\Omega_e^L - \Omega_e} \right) |e\rangle \langle f|\bar{\phi}\rangle - \mu_e \left(\frac{\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_e)t}}{\Omega_g^L - \Omega_e} + \frac{\mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_e)t}}{\Omega_e^L - \Omega_e} \right) |f\rangle \langle e|\bar{\phi}\rangle \end{aligned}$$

Hamiltonien Raman (suite)

Le report dans l'Hamiltonien effectif de $|\delta\phi\rangle$ en fonction de $|\bar{\phi}\rangle$ donne le produit de $\frac{H_{\text{eff}}(t)}{\hbar}$ rappelé ci dessous

$$\mu_g \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_g)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_g)t} \right) |f\rangle \langle g| + \mu_g \left(\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_g)t} + \mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_g)t} \right) |g\rangle \langle f|$$
$$\mu_e \left(\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_e)t} + \mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_e)t} \right) |f\rangle \langle e| + \mu_e \left(\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_e)t} + \mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_e)t} \right) |e\rangle \langle f|$$

par l'opérateur $A(t)$ ci dessous :

$$\mu_g \left(\left(\frac{\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_g)t}}{\Omega_g^L - \Omega_g} + \frac{\mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_g)t}}{\Omega_e^L - \Omega_g} \right) |g\rangle \langle f| - \left(\frac{\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_g)t}}{\Omega_g^L - \Omega_g} + \frac{\mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_g)t}}{\Omega_e^L - \Omega_g} \right) |f\rangle \langle g| \right)$$
$$+ \mu_e \left(\left(\frac{\mathbf{u}_g^* e^{-i(\Omega_g^L - \Omega_e)t}}{\Omega_g^L - \Omega_e} + \frac{\mathbf{u}_e^* e^{-i(\Omega_e^L - \Omega_e)t}}{\Omega_e^L - \Omega_e} \right) |e\rangle \langle f| - \left(\frac{\mathbf{u}_g e^{i(\Omega_g^L - \Omega_e)t}}{\Omega_g^L - \Omega_e} + \frac{\mathbf{u}_e e^{i(\Omega_e^L - \Omega_e)t}}{\Omega_e^L - \Omega_e} \right) |f\rangle \langle e| \right)$$

Alors $|\bar{\phi}\rangle$ vérifie $i\frac{d}{dt}|\bar{\phi}\rangle = \frac{H_{\text{eff}}(t)}{\hbar}A(t)|\bar{\phi}\rangle$. Il est clair que $\frac{H_{\text{eff}}(t)}{\hbar}A(t)$ est une combinaison linéaire de $|g\rangle\langle g|$, $|e\rangle\langle e|$, $|f\rangle\langle f|$, $|e\rangle\langle g|$ et $|g\rangle\langle e|$. La dynamique de $|\bar{\phi}\rangle$ selon $|f\rangle$ est découplée des deux autres composantes selon $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Ainsi, si $\langle f|\phi\rangle_{t=0} = 0$ alors $\langle f|\phi\rangle_t \approx 0$ pour tout t .

Hamiltonien Raman (fin)

Une fois que l'on a éliminé les termes oscillants à des pulsations de l'ordre de Δ , on obtient l'Hamiltonien Raman H_{Raman} suivant

$$\begin{aligned} \frac{H_{\text{Raman}}}{\hbar} &= \mu_g^2 \left(\frac{|\mathbf{u}_g|^2}{\Delta} + \frac{|\mathbf{u}_e|^2}{\Delta + \Omega} \right) |g\rangle \langle g| + \mu_e^2 \left(\frac{|\mathbf{u}_g|^2}{\Delta - \Omega} + \frac{|\mathbf{u}_e|^2}{\Delta} \right) |e\rangle \langle e| \\ &+ \frac{\mu_g \mu_e}{\Delta} \left(\mathbf{u}_g^* \mathbf{u}_e e^{i\delta t} |g\rangle \langle e| + \mathbf{u}_g \mathbf{u}_e^* e^{-i\delta t} |e\rangle \langle g| \right) \\ &- \left(\frac{|\mu_g \mathbf{u}_g|^2}{\Delta} + \frac{|\mu_e \mathbf{u}_e|^2}{\Delta + \Omega} + \frac{|\mu_g \mathbf{u}_e|^2}{\Delta + \Omega} + \frac{|\mu_e \mathbf{u}_g|^2}{\Delta - \Omega} \right) |f\rangle \langle f| \end{aligned}$$

On a négligé δ devant Δ et $\Delta \pm \Omega$, ce qui est licite car c'est une développement asymptotique à l'ordre 1 inclus. Cela permet aussi d'avoir H_{Raman} rigoureusement hermitien (et pas hermitien à des termes d'ordre 2 près, comme c'est le cas avec le calcul brut de la partie séculaire de $\frac{H_{\text{eff}}}{\hbar} \mathbf{A}$).

Transition Raman

La restriction aux deux états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ est donc licite à cause de la structure de H_{Raman} . Tout se passe comme si on avait affaire à un système à deux niveaux vérifiant :

$$i \frac{d}{dt} |\phi\rangle = \left(v_g |g\rangle \langle g| + v_e |e\rangle \langle e| + \frac{U_{\text{eff}} e^{-i\delta t}}{2} |e\rangle \langle g| + \frac{U_{\text{eff}}^* e^{i\delta t}}{2} |g\rangle \langle e| \right) |\phi\rangle$$

où $v_g, v_e \in \mathbb{R}$ et $U_{\text{eff}} \in \mathbb{C}$ sont des contrôles :

$$v_g = \mu_g^2 \left(\frac{|\mathbf{u}_g|^2}{\Delta} + \frac{|\mathbf{u}_e|^2}{\Delta + \Omega} \right), \quad v_e = \mu_e^2 \left(\frac{|\mathbf{u}_g|^2}{\Delta - \Omega} + \frac{|\mathbf{u}_e|^2}{\Delta} \right), \quad U_{\text{eff}} = \frac{\mu_g \mu_e}{2\Delta} \mathbf{u}_g \mathbf{u}_e^*$$

Le changement de repère $|\chi\rangle = e^{i \int_0^t (v_g + v_e) dt} e^{-\frac{i\delta t}{2} \sigma_z} |\phi\rangle$ donne

$$i \frac{d}{dt} |\chi\rangle = \left(\frac{U}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) + \frac{U_{\text{eff}}}{2} |e\rangle \langle g| + \frac{U_{\text{eff}}^*}{2} |g\rangle \langle e| \right) |\chi\rangle$$

avec comme nouveau contrôle scalaire $v_e - v_g - \delta = U \in \mathbb{R}$.

Transition Raman (fin)

En conclusion : à un changement diagonal près et sous les hypothèses "Raman" la dynamique de $|\psi\rangle$ est quasiment celle d'un **système à deux niveaux**

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left(\frac{U}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \frac{U_{\text{eff}}}{2} |e\rangle\langle g| + \frac{U_{\text{eff}}^*}{2} |g\rangle\langle e| \right) |\psi\rangle$$

où les contrôles U et U_{eff} sont donnés en fonction des amplitudes complexes \mathbf{u}_g et \mathbf{u}_e par

$$U + \delta = |\mathbf{u}_g|^2 \left(\frac{\mu_e^2}{\Delta - \Omega} - \frac{\mu_g^2}{\Delta} \right) + |\mathbf{u}_e|^2 \left(\frac{\mu_e^2}{\Delta} - \frac{\mu_g^2}{\Delta + \Omega} \right), \quad U_{\text{eff}} = \frac{\mu_g \mu_e}{2\Delta} \mathbf{u}_g \mathbf{u}_e^*$$

- ▶ Il suffit de prendre $U = 0$ et $U_{\text{eff}} = \omega_r$ où $\omega_r > 0$ est une constante (pulsation) pour retrouver les oscillations de Rabi : $|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i\omega_r t}{2}} \sigma_x |\psi\rangle_0$.
- ▶ On parle alors d'impulsion Raman π (resp. $\frac{\pi}{2}$) si le temps T de l'impulsion vérifie $\omega_r T = \pi$ (resp. $\omega_r T = \frac{\pi}{2}$).

Conclusions

- ▶ Importance des **calculs perturbatifs** pour comprendre la stabilité d'une PLL et la forme des impulsions électro-magnétiques manipulant les états quantiques.
- ▶ Peu de développements numériques qui garantissent la **précision des simulations en temps très longs** (plusieurs milliers, millions de périodes) : il faudra certainement mélanger schémas numériques et calculs perturbatifs d'ordre ≥ 2 .
- ▶ La méthode de "Kaptisa" se généralise à tout ordre (transitions à plusieurs photons).
- ▶ La prise en compte du **bruit dans les simulations en temps longs** est aussi une question à creuser.

Références

- ▶ *EDO, systèmes plans, et contrôle (très pédagogique et pourtant d'un excellent niveau)* A. Andronov, S. Khaikin and A. Vitt : Theory of Oscillators. Dover (English Translation), 1987.
- ▶ *Idem ci-dessus* : J. Guckenheimer and P. Holmes : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 1983.
- ▶ *Contrôle non linéaire, théorie des perturbations, systèmes dynamiques* : H. Khalil : Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.
- ▶ *Sur les diverses types de PLL* : N.I. Margaris : Theory of Non-Linear Analog Phase Locked Loop. Lecture Notes in Control and Information Sciences no 304, 2004.
- ▶ *Livre de base en mécanique quantique* : C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. Mécanique Quantique. Hermann, Paris 1977 (vol I & II).
- ▶ *Un livre plus avancé et passionnant* : S. Haroche, J-M Raimond. Exploring the quantum : atoms, cavities and photons. Oxford University Press (Graduate texts), 2006.