

C30181

**Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson  
94230 CACHAN

---

Concours d'admission en 3<sup>ème</sup> année  
**GÉNIE MÉCANIQUE ET MÉCANIQUE**  
Session 2010

---

**Épreuve de MÉCANIQUE ET AUTOMATIQUE**

---

Durée : **4 heures**

---

*Aucun document n'est autorisé*

*L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail (circulaire n°99 018 du 1<sup>er</sup> février 1999).*

Le sujet comporte 10 pages de texte, 1 page document, 2 annexes (5 pages) et 4 documents réponses.

**Nota.** À partir d'un support commun, l'épreuve comporte deux parties totalement indépendantes :

- Mécanique générale ;
- Automatique (systèmes asservis linéaires).

**Le candidat devra traiter les deux parties.**

Ces parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Il est conseillé au candidat de lire attentivement le sujet en entier et **d'accorder un temps sensiblement égal à chacune des deux parties.**

Les deux parties traitées seront rédigées sur des copies séparées et il faudra préciser sur chaque copie :

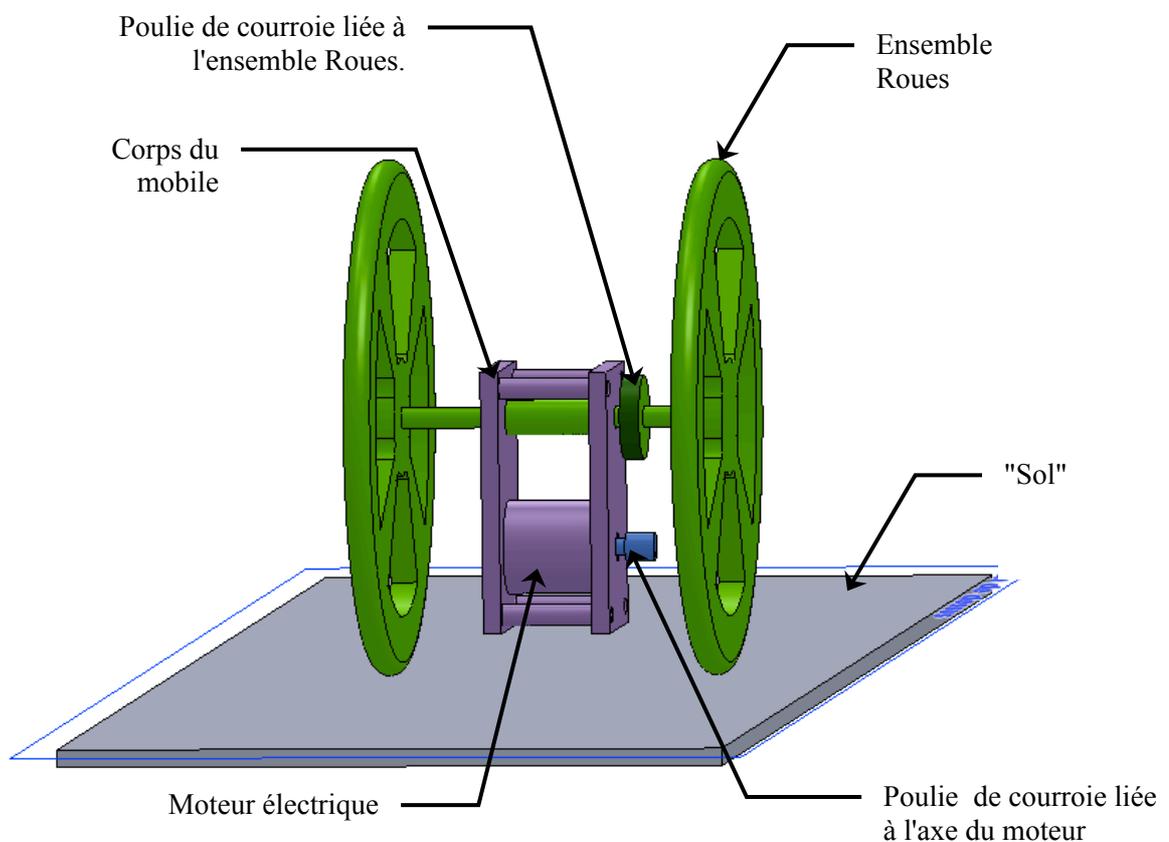
- le titre,
- le repère de l'épreuve,
- la partie de l'épreuve traitée,
- le nombre de feuilles constituant la copie.

Vous veillerez à rendre les documents réponses avec les copies correspondantes.

# Un Oscillo-mobile

## Présentation

Le support d'étude est un mobile. La figure ci-dessous présente une vue CAO schématique du système au repos ainsi que les principaux composants. Le corps du mobile supporte un moteur électrique et un ensemble comportant deux roues. La rotation de l'axe du moteur électrique est transmise aux roues par une courroie crantée, non représentée sur la figure, reliant les deux poulies. Cette rotation induit deux phénomènes couplés : une modification de l'inclinaison du corps par rapport à la verticale et un couple sur les roues permettant l'avance du mobile.



La première partie du sujet porte sur la détermination des équations du mouvement du mobile et la deuxième sur l'asservissement du mobile. Ces parties sont indépendantes.

# PREMIERE PARTIE

## MECANIQUE GENERALE

Nous utiliserons le modèle plan du Document 1 pour déterminer des équations nécessaires à la commande du mécanisme.

Les trois parties proposées sont indépendantes.

Ce modèle comprend 4 solides supposés indéformables. Les informations pratiques sont reprises document 1.

- Sol (0) : supposé plan, associé à un référentiel Galiléen. Repère lié  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  avec  $\vec{z}$  la direction verticale descendante et  $\vec{x}$  la direction de mouvement du mobile.
- Roue (1) : solide supposé axisymétrique de masse  $m_1$  et de moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(A, \vec{y})$ . Repère lié  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ . Le solide est positionné dans (0) par l'angle  $\alpha_1(t)$  tel que  $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1) = \alpha_1$  et par la distance  $x(t)$  telle que  $\overrightarrow{OA} = x(t) \vec{x}$ .  
(1) est en contact avec (0) en  $I$  et est supposé rouler sans glisser sur (0). Le rayon des roues est noté  $R$ .
- Corps (2) : en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  par rapport à (1), paramétrée par l'angle  $\alpha_2(t)$ . De masse  $m_2$ , de centre de gravité  $G$  tel que  $\overrightarrow{AG} = e \vec{z}_2$ , de moment d'inertie  $I_2$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{y})$ . Repère lié  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)$  tel que  $(\vec{x}, \vec{x}_2) = (\vec{z}, \vec{z}_2) = \beta(t)$ .  
Ce corps supporte un moteur électrique d'axe  $(B, \vec{y})$ .  $\overrightarrow{AB} = L \vec{z}_2$ .
- Axe de moteur (3) : en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{y})$  par rapport à (2). Les effets d'inertie de ce composant sont négligés (masse et inertie négligeables). La vitesse de rotation de cet axe par rapport à son stator lié à (2) est  $\vec{\omega}_{3/2} = \omega_{32} \vec{y}$ .

L'axe du moteur et l'ensemble roue sont reliés par une courroie crantée. Le nombre de dents des poulies liées respectivement à (1) et (3) sont notés  $Z_1$  et  $Z_3$  tels que  $Z_1 / Z_3 = 1 / 3 = k$  (rapport de réduction de la transmission).

Le couple exercé par (2) sur (3) au travers du moteur électrique est noté  $C \vec{y}$ .

Le poids des composants (1) et (2) est **non** négligeable.

Par défaut, les liaisons sont supposées parfaites.

## Analyse du système

- 1.1. Réaliser un graphe de structure (de liaison) du modèle étudié comportant les actions extérieures et intérieures au mécanisme.
- 1.2. Détailler le modèle que vous proposez pour la courroie placée entre (1) et (3). Vous préciserez, si besoin, la ou les actions mécaniques associées.
- 1.3. De même, détailler le modèle proposé pour la liaison entre (1) et (0), liaison assurant un roulement sans glissement.
- 1.4. Déterminer le degré de mobilité cinématique et le degré d'hyperstatisme de votre modèle.
- 1.5. Déterminer la relation cinématique entre les paramètres de position imposée par le roulement sans glissement en I.
- 1.6. Ecrire la relation cinématique imposée par la courroie et l'exprimer en fonction de  $\dot{\beta}$  (dérivée par rapport au temps de l'angle  $\beta$ ),  $\dot{x}$ ,  $k$  et  $R$ .

## Equations du mouvement

Nous recherchons des équations du mouvement en fonction des **paramètres cinématiques  $x$  et  $\beta$** . Ces équations ne devront dépendre, pour les actions mécaniques, que du poids et du couple moteur  $C$ .

Remarques : vous veillerez à exprimer clairement les formules utilisées. Il n'est pas nécessaire de projeter les résultats vectoriels dans une base unique.

- 1.7. Déterminer l'accélération de  $G$  par rapport à (0).
- 1.8. On isole l'ensemble des solides (1), (2) et (3). Faire le bilan des actions mécaniques extérieures puis appliquer le principe fondamental de la dynamique en résultante à cet ensemble, en projection sur  $\vec{x}$ .

La tension du brin tendu de la courroie est notée  $T$ .

On isole (1)

- 1.9. Faire le bilan des actions extérieures.
- 1.10. Ecrire l'équation du PFD (principe fondamental de la dynamique), en moment, en  $A$ , en projection sur  $\vec{y}$ .

1.11. Déterminer la relation entre la tension de la courroie et le couple moteur. Vous préciserez le ou les solides isolés, ainsi que la ou les équations de la dynamique permettant d'obtenir le résultat.

1.12. Dédurre des relations précédentes une équation du mouvement.

1.13. Déterminer le moment dynamique de (2) par rapport à (0), en A, en projection sur  $\vec{y}$ , notée  $\delta_{A,2/0}^{\vec{y}}$ .

On isole (2)+(3) :

1.14. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures,

1.15. Ecrire l'équation de la dynamique (PFD) en moment, en A, en projection sur  $\vec{y}$ , pour l'ensemble isolé.

1.16. En déduire une deuxième équation de mouvement.

### **Caractérisation en régime stationnaire**

Dans cette partie nous nous placerons en régime stationnaire. L'étude peut être réalisée à partir des équations de la statique.

Le sol, toujours plan, est supposé incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontal, dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

1.17. Proposer, sous la forme d'un schéma plan, un modèle d'étude paramétré. Vous ferez apparaître, en particulier, les angles  $\theta$  et  $\beta$ , le point de contact roue/sol et les actions mécaniques.

1.18. Déterminer la relation entre  $\beta$  et  $\theta$  assurant l'équilibre statique du mobile sur le plan incliné. Vous préciserez le système isolé et le ou les équations utilisées.

1.19. Déterminer, le couple moteur dans ces conditions.

1.20. Déterminer, en fonction des paramètres, la valeur maximale de  $\theta$ .

# DEUXIEME PARTIE

## ASSERVISSEMENT

Le problème posé dans cette partie est l'ensemble des asservissements à mettre en œuvre pour assurer un déplacement correct du mobile. Les 3 parties sont indépendantes.

On part du principe que les équations qui régissent la vitesse  $v$  du mobile et l'angle  $\beta$  d'inclinaison du pendule sont<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} J_1 \cdot \frac{dv}{dt} + \Gamma_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} - \Gamma_1 \cdot \sin(\beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \gamma_1 \cdot C_m - F_R \\ J_2 \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} + \Gamma_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{dv}{dt} = -\Gamma_2 \cdot \sin(\beta) + \gamma_2 \cdot C_m \end{cases}$$

avec :

- $J_1$  inertie totale ramenée à l'axe des roues = 3,84 kg.m<sup>2</sup>
- $J_2$  inertie du pendule ramené à l'axe des roues = 6,5 10<sup>-3</sup> kg.m<sup>2</sup>
- $\Gamma_1, \Gamma_2, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des constantes dépendantes des caractéristiques géométriques valant respectivement 0.075, 0.736, 20 et 3 unités S.I.
- $C_m$  couple fournit par le moteur électrique en N.m
- $F_R$  un effort, sec ou visqueux s'opposant au déplacement.

Des équations ci-dessus il apparaît que, pour atteindre un régime permanent ( $dv/dt = cte$  et  $\beta = cte$ ) on doit avoir :

$$\begin{cases} C_m = \frac{1}{\gamma_1} \cdot \left( J_1 \cdot \frac{dv}{dt} + F_R \right) \\ C_m = \frac{1}{\gamma_2} \cdot \left( \Gamma_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{dv}{dt} + \Gamma_2 \cdot \sin(\beta) \right) \end{cases}$$

Une accélération constante (éventuellement nulle) du chariot nécessite un certain couple moteur qui lui-même correspond à un certain angle  $\beta$  du pendule. Or, compte tenu du rapport des inerties  $J_1$  et  $J_2$ , on peut considérer que le pendule atteindra la position  $\beta$  beaucoup plus vite que la vitesse du chariot n'évoluera. La stratégie d'asservissement va donc consister à contrôler la vitesse du chariot en contrôlant en fait  $\beta$ , lui-même contrôlé par le couple moteur :

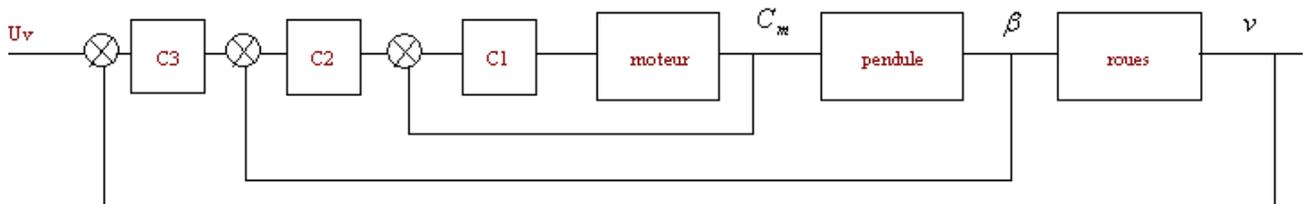


figure 1 : stratégie de commande de la vitesse du mobile

<sup>1</sup> Les conventions ne sont pas nécessairement les mêmes que dans la première partie

## Commande du moteur en couple

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu à aimant permanent dont le comportement est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} U = e + R_e \cdot i + L_e \cdot \frac{di}{dt} \\ e = k_e \cdot \Omega \\ C_m = k_c \cdot i \\ J_m \cdot \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r \end{cases}$$

avec

- $U$  tension appliquée au moteur, en V
- $e$  force électromotrice, en V
- $\Omega$  vitesse de rotation du rotor par rapport au stator, en rd/s
- $R_e = 1,51 \Omega$  et  $L_e = 10$  mH, respectivement résistance et inductance de l'induit du moteur.
- $k_e = k_c$  constantes de f.e.m et de couple, égales à 0,05 V/rd/s ou N.m/A
- $J_m$  inertie totale ramenée sur l'axe du moteur
- $C_r$  couple résistant

Le moteur est commandé par un amplificateur de puissance de gain  $\frac{u}{u_c} = A = 2,4 V/V$ .

On considère que la charge est purement inertielle ( $C_r = 0$ ) avec  $J_m = 7,2 \cdot 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>.

Commander un tel moteur en couple consiste à asservir son courant. Pour cela on dispose d'une sonde de courant de gain  $k_i = 1$  V/A. Le principe de la commande en couple est alors celui de la figure 2

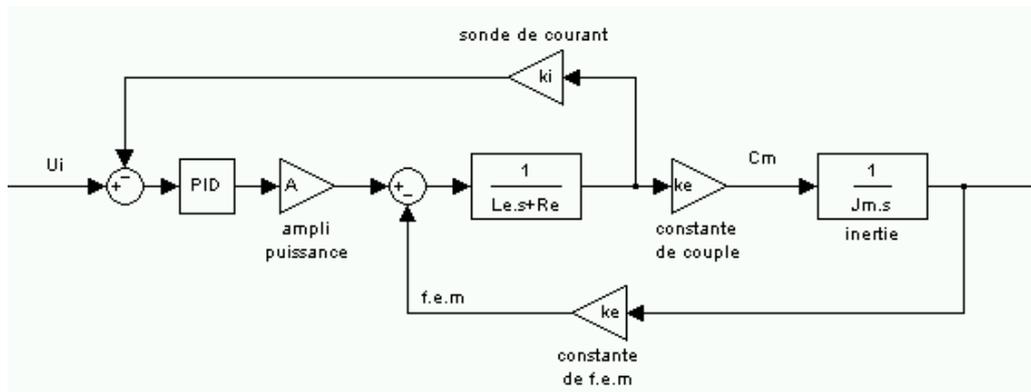


figure 2 : commande en couple ( $s \leftrightarrow p$ )

La f.e.m est considérée comme une perturbation, de variation bien plus lente que la variation du courant. Autrement dit, la f.e.m reste constante pendant le régime transitoire de l'établissement du courant et la boucle de courant est étudiée selon le modèle de la figure 3.

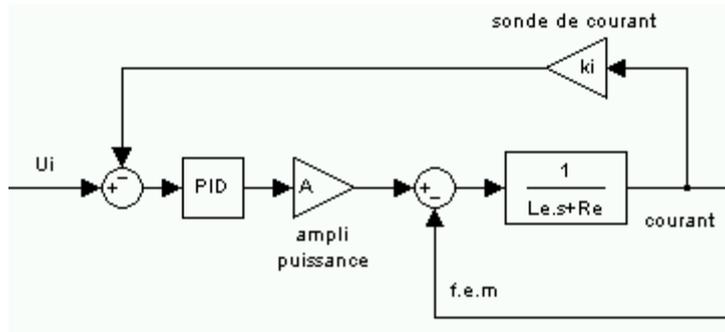


figure 3 : modèle pour la boucle de courant ( $s \Leftrightarrow p$ )

Le correcteur est de type proportionnel intégral de fonction de transfert

$$C_1(p) = K_{pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \text{ avec } T_i = \frac{L_e}{R_e}$$

- 2.1. Donner la fonction de transfert  $\frac{I(p)}{U_i(p)}$  en absence de perturbation.
- 2.2. Déterminer  $K_{pi}$  pour avoir la même constante de temps que la constante de temps électrique  $L_e/R_e$ .
- 2.3. Déterminer l'erreur statique, en absence et en présence d'une f.e.m perturbatrice constante.
- 2.4. Montrer que l'on peut ramener le modèle de figure 2 à celui, simplifié de la figure 4 et exprimer  $K$  et  $T$ .

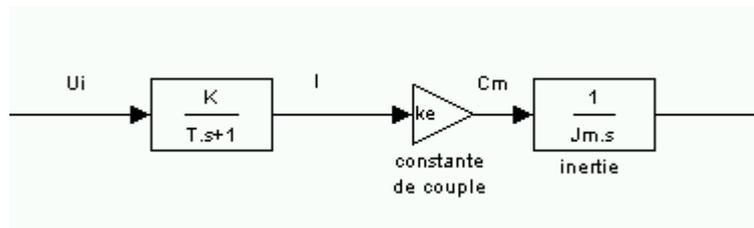


figure 4 : modèle simplifié du moteur commandé en couple ( $s \Leftrightarrow p$ )

- 2.5. Comparer les réponses indicielles du modèle de la figure 4 et de la fonction de transfert  $\frac{K \cdot k_e}{J_m \cdot p}$ . Conclure.

### Asservissement de l'angle du pendule

Dans cette partie on considère que l'on a  $\frac{C_m}{U_i} = \frac{k_e}{k_i}$  et que la vitesse du chariot est constante.

L'évolution de l'inclinaison du pendule est donc donnée par :

$$J_2 \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} + \Gamma_2 \cdot \sin(\beta) = \gamma_2 \cdot C_m$$

C'est une équation non linéaire. On pose  $\beta = \beta_0 + \psi$  où  $\beta_0$  est une consigne constante (comprise entre 0 et  $2\pi/5$ ), telle que  $\Gamma_2 \cdot \sin(\beta_0) = \gamma_2 \cdot C_m$  en régime permanent, et l'approximation  $\sin(\beta) \approx \sin(\beta_0) + \psi \cdot \cos(\beta_0)$

2.6. Donner la fonction de transfert  $\frac{\psi(p)}{C_m(p)}$  du régime de variation autour d'une consigne

$\beta_0$ .

2.7. Quelle est la réponse de ce système à un échelon de couple de 0,1 N.m ?

Pour amortir le système, on introduit un retour dit tachymétrique, selon le modèle de la figure 5

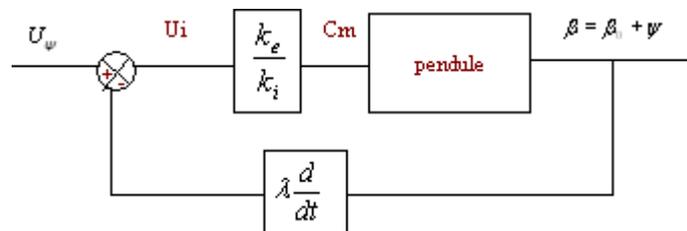


figure 5 : amortissement du pendule par retour tachymétrique

2.8. Donner la fonction de transfert  $\frac{\psi(p)}{U_\psi(p)}$  et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{K}{p^2 + 2\zeta\omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \text{ et expliciter } K, \omega_0 \text{ et } \zeta$$

2.9. Exprimer  $\lambda$  pour avoir un amortissement  $\zeta$  donné

2.10. Déterminer  $\lambda$  pour avoir un amortissement supérieur à 0,7 quelle que soit la consigne  $\beta_0$  sur la plage  $[0, 2\pi/5]$

2.11. Exprimer l'erreur statique en fonction de  $\beta_0$

Dans la suite, on prend  $\lambda = 2 \text{ V/rd/s}$ .

Pour s'affranchir de l'erreur statique, on introduit un correcteur proportionnel intégral dans une boucle d'asservissement de  $\beta$ , selon le modèle de la figure 6. On dispose d'un capteur qui donne la valeur de  $\beta$  avec un gain  $k_\beta = 3,2 \text{ V/rd}$

Le correcteur a une fonction de transfert  $C_2(p) = K_{p\beta} \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_{i\beta} \cdot p} \right)$ . On va fixer les

performances de l'asservissement pour  $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ . Avec  $\lambda = 2 \text{ V/rd/s}$ , cela conduit à :

$$\frac{\psi(p)}{U_\psi(p)} = \frac{7,7}{p^2 + 15,4 \cdot p + 56,6}$$

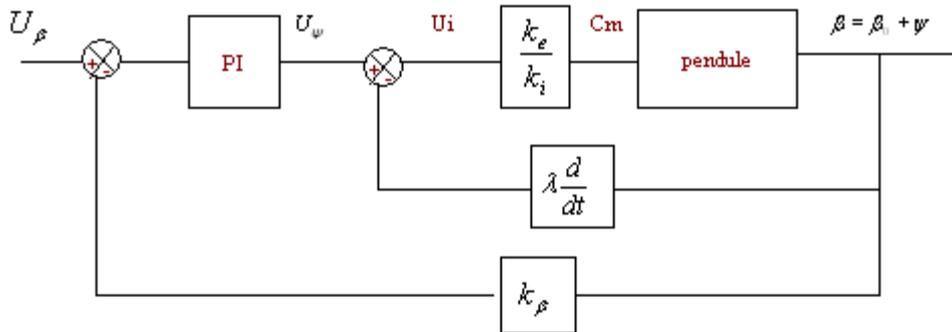


figure 6 : boucle d'asservissement de l'inclinaison du pendule

On prend pour constante de temps de  $T_{i\beta}$  celle qui correspond à la plus grande de la fonction  $\frac{\psi(p)}{U_\psi(p)}$

- 2.12. Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte et tracer le diagramme de Bode.
- 2.13. Déterminer le gain proportionnel  $K_{P\beta}$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .
- 2.14. Donner la fonction de transfert en boucle fermée.
- 2.15. Quel échelon de tension appliquer pour obtenir un angle de  $\pi/3$  ? Déterminer le temps de réponse à 10%
- 2.16. Que se passera-t-il si la consigne d'angle n'est pas  $\pi/3$  ? Quel sera l'ordre de la fonction de transfert ?

Pour garder le contrôle de l'angle, il vaut mieux prévoir une saturation de la consigne  $U_\beta$  pour que  $\beta$  ne dépasse pas  $\pi/2$ .

- 2.17. Compte tenu du comportement dynamique obtenu, quelle valeur de saturation donner à  $U_\beta$  ?

### Asservissement de vitesse

Si les asservissements déterminés précédemment fonctionnent correctement, on peut considérer, pour l'asservissement de vitesse, le modèle simplifié de la figure 7 :

- Une tension de consigne  $U_\beta$  impose l'inclinaison du pendule
- Cette inclinaison correspond à une force  $F$  d'entraînement du mobile
- Une force de perturbation  $F_r$  intervient éventuellement
- L'équation dynamique  $J_1 \cdot \frac{dv}{dt} = F - F_r$  donne l'évolution de la vitesse

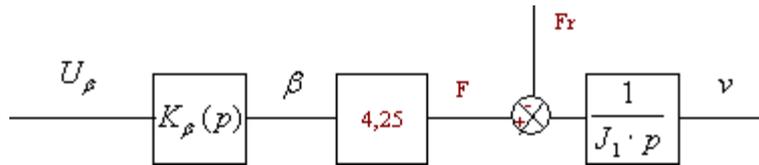


figure 7 : modèle pour l'asservissement de vitesse

$$K_{\beta}(p) = \frac{\beta}{U_{\beta}} = \frac{0,675}{0,01765p^2 + 0,1643p + 2,16}$$

La vitesse est mesurée au travers d'un capteur de gain 0,5 V/m/s

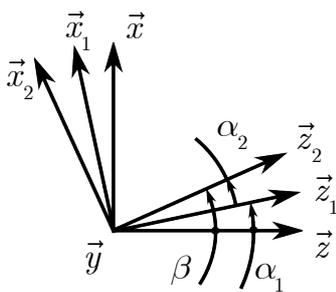
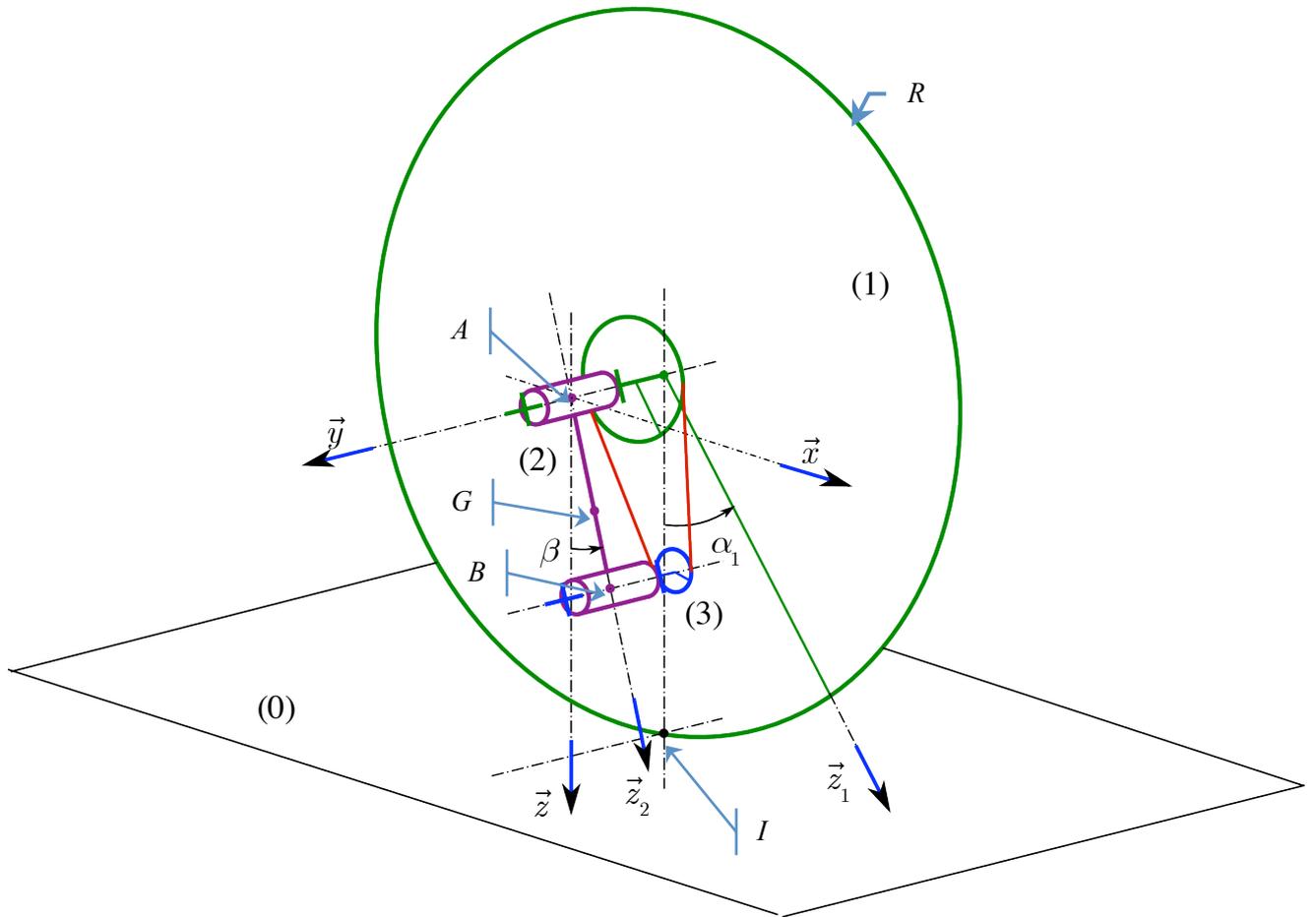
La fonction de transfert en boucle ouverte fait apparaître un terme d'intégration pure

- 2.18. *La présence de cet intégrateur pur dans la chaîne directe garantit-elle l'absence d'erreur statique, en absence de force perturbatrice ? En présence ? Justifier les réponses*
- 2.19. *Peut-on prendre pour correcteur un intégrateur pur ? Justifier la réponse*

On place un correcteur PI de fonction de transfert  $C_3(p) = K_{pv} \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_{iv} \cdot p} \right)$

- 2.20. *En utilisant le diagramme de Bode, déterminer  $K_{pv}$  et  $T_{iv}$  pour obtenir une marge de phase maximale de -120 degrés, correspondant à une marge de phase de 60 degrés.*

# DOCUMENT 1



$$\overrightarrow{OA} = x \vec{x}$$

$$\overrightarrow{AG} = e \vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{AB} = L \vec{z}_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_3} = k$$

Sol (0) : bâti supposé Galiléen, repère lié  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Roue (1) : Axisymétrique, de masse  $m_1$ , de moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(A, \vec{y})$ ,  
repère lié  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Corps (2) : de masse  $m_2$ , de centre de gravité  $G$ , de moment d'inertie  $I_2$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{y})$ ,  
repère lié  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Axe (3) : masse et inertie négligeable. Vitesse de rotation par rapport à (2) :  $\vec{\omega}_{3/2} = \omega_{32} \vec{y}$