

C31181

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 3^{ème} année
GÉNIE MÉCANIQUE ET MÉCANIQUE
Session 2011

Épreuve de MÉCANIQUE ET AUTOMATIQUE

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail.

Le sujet comporte 11 pages de texte.

Nota : à partir d'un support commun, le sujet propose deux parties totalement indépendantes :

- Mécanique
- Automatique

Le candidat devra traiter les deux parties.

Ces deux parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Il est conseillé au candidat de lire attentivement le sujet en entier et d'accorder un temps sensiblement égal pour les deux parties.

Les deux parties seront rédigées sur des copies séparées et il faudra préciser sur chaque copie :

- le titre,
- le repère de l'épreuve,
- la partie de l'épreuve traitée,
- le nombre de feuilles constituant la copie.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Introduction

Jusqu'à maintenant, la mise sur orbite et le maintien à poste de satellites dans l'espace était réalisé à l'aide de moteurs conventionnels utilisant la détente de gaz. Depuis les années 90, la SNECMA s'oriente vers la technologie plasmique pour des missions longues ne demandant pas de fortes poussées.

Les propulseurs plasmiques, qui fonctionnent grâce à l'éjection à très grande vitesse d'ions de Xénon, ont une faible poussée (350mN pour le PPS5000) mais possèdent une impulsion spécifique élevée qui leur confère une consommation et une masse moindres.



FIGURE 1 – Moteur plasmique en fonctionnement (droite)

La présente étude s'intéresse à une balance destinée à mesurer la poussée de tels moteurs plasmiques en laboratoire. Ce système de mesure est constitué d'un ensemble mobile à l'extrémité duquel est fixé le moteur. Le tout est en translation suivant la direction horizontale par rapport à un socle d'inclinaison réglable.

Le guidage de cet équipement est réalisé par des lames parallèles en acier qui reprennent le poids de l'ensemble et permettent le mouvement. Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer), placé sur l'axe de poussée permet de mesurer en continu le mouvement de la balance. Un moteur linéaire de même axe constitué d'un aimant permanent lié au socle et d'une bobine se déplaçant avec l'équipage mobile fournit une force de Laplace dans la même direction grâce au courant qui l'alimente.

La consigne de courant est générée par une carte électronique à partir du signal issu du LVDT. La force de Laplace qu'elle génère ramène l'ensemble mobile à sa position de repos. La valeur de la poussée est obtenue en mesurant l'intensité du courant qui permet d'assurer un déplacement nul.

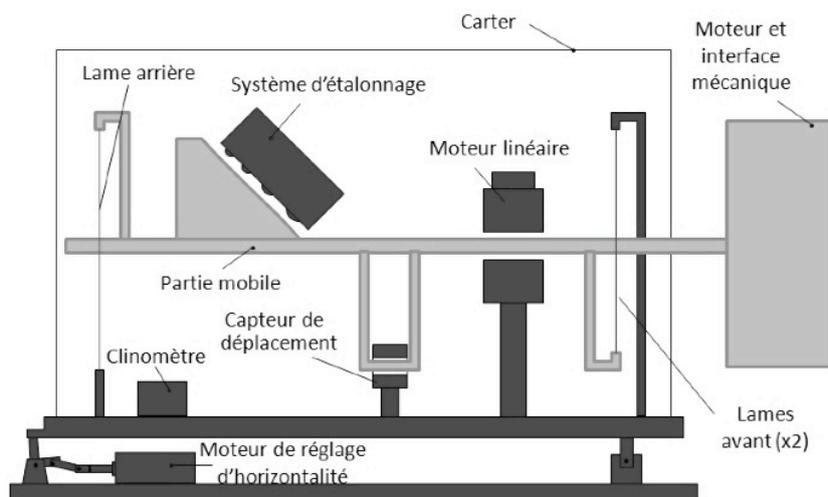


FIGURE 2 – Schématisation de la balance pour moteur plasmique

L'objectif de la présente étude est l'analyse du comportement dynamique de la balance (première partie, sections 1 à 3), de son système d'étalonnage (première partie, section 4) et du système d'asservissement qui permet de maintenir l'ensemble mobile à sa position de repos (seconde partie).

Première partie : Mécanique

Cette partie concerne l'étude mécanique de l'équipage mobile de la balance. On s'intéresse plus particulièrement au comportement dynamique et au système d'étalonnage. La section 4 est totalement indépendante des trois premières. Les sections 1 à 3 sont indépendantes mais il est préférable de les traiter dans l'ordre pour une meilleure compréhension du sujet.

Le guidage de l'équipage mobile est réalisé par trois lames parallèles flexibles en acier : les deux premières, côté moteur, sont disposées symétriquement de part et d'autre de l'axe de poussée et reprennent l'essentiel du poids. Compte-tenu de la présence de ces trois lames, on considère que le déplacement de l'équipage mobile est purement axial dans la direction de la poussée. Afin de réaliser l'asservissement en position du système, on cherche dans un premier temps à construire un modèle dynamique unidimensionnel de l'équipage mobile tel que celui présenté sur la figure 3.

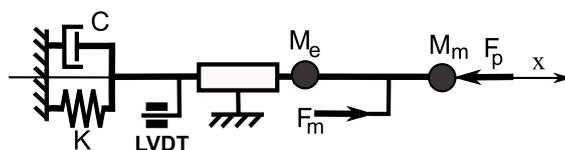


FIGURE 3 – Modèle unidimensionnel de l'équipage mobile

où :

- M_e est la masse de l'équipage mobile
- M_m est la masse du moteur plasmique
- F_p est l'effort de poussée
- F_m est l'effort du moteur linéaire
- K est la constante de raideur d'un ressort équivalent représentant les trois lames élastiques
- C est la caractéristique d'un amortisseur visqueux.

Section 1.1 Etude de la raideur d'une lame

On cherche ici à déterminer la raideur des lames élastiques utilisées. Une lame est représentée sur la figure 4-a. L'extrémité inférieure de la lame est encastrée. Sachant que le mouvement de l'équipage mobile est purement axial on considère que l'extrémité supérieure est en liaison glissière c'est-à-dire telle qu'il n'y a pas de rotation possible.

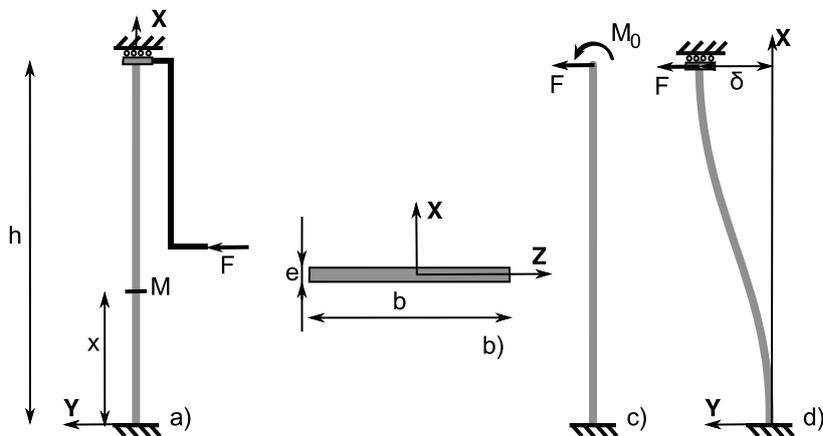


FIGURE 4 – Version initiale des lames élastiques

On cherche à déterminer la raideur équivalente k d'une lame. Cette raideur est définie comme

le rapport entre un effort F appliqué en bout de lame et le déplacement δ produit (figure 4-d) :

$$k = \frac{F}{\delta}$$

On utilise une modélisation poutre de Bernoulli pour la lame. On considère que la lame est très rigide en compression et on néglige ce mode de déformation. La section de la poutre est rectangulaire de largeur b et d'épaisseur e (voir figure 4-b).

Question 1.1.1 Donner le moment quadratique I de cette section pour son mouvement autour de l'axe Z en fonction de b et e .

Question 1.1.2 Montrer que ce problème de résistance des matériaux est hyperstatique de degré un .

Question 1.1.3 On choisit de prendre le moment dans la liaison glissière en haut (M_0) comme inconnue hyperstatique. Le chargement sur la poutre isostatique équivalente est représenté sur la figure 4-c. Exprimer le moment fléchissant $M_f(x)$ en tout point M d'abscisse x le long de la lame en fonction de M_0 , F , h et x .

Question 1.1.4 Donner l'expression de l'énergie de déformation E_d de cette lame en fonction de E , I , M_0 , F , h .

Question 1.1.5 En appliquant le théorème de Castigliano (le déplacement provoqué par un effort dans la direction de cet effort est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cet effort) déterminer l'expression de δ en fonction de E , I , M_0 , F , h .

Question 1.1.6 En appliquant le théorème de Ménabréa (la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une inconnue hyperstatique est nulle) déterminer l'expression de M_0 en fonction de F et h .

Question 1.1.7 En déduire l'expression de δ en fonction de E , I , F et h puis celle de k en fonction de E , I et h .

Question 1.1.8 En déduire la raideur globale K du système des trois lames, sachant qu'elles sont toutes de même géométrie.

Section 1.2 Augmentation de la raideur d'une lame

Afin de tester une gamme de moteurs plus puissants en conservant le même niveau de déplacement de l'équipage mobile, on souhaite augmenter la raideur du système de lames élastiques. Sans changer la géométrie de la structure et donc la longueur des lames, on se propose d'augmenter leur raideur en fixant des lames plus épaisses et considérées comme indéformables le long des lames existantes (figure 5-a). La longueur de ces lames épaisses est la moitié de celle des lames déformables et elles sont fixées au milieu de ces dernières. On applique la même stratégie que dans la section précédente pour déterminer la nouvelle raideur équivalente. On utilise pour la lame un modèle continu de poutre de Bernoulli pour lequel la raideur de la partie centrale est considérée infinie.

Question 1.2.1 Exprimer le moment fléchissant $M_f(x)$ en tout point M d'abscisse x le long de la lame en fonction de M_0 , F , h et x .

Question 1.2.2 Donner l'expression de l'énergie de déformation E_d de cette lame en fonction de E , I , M_0 , F , h .

Question 1.2.3 En appliquant le théorème de Castigliano (le déplacement provoqué par un effort dans la direction de cet effort est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cet effort) déterminer l'expression de δ en fonction de E , I , M_0 , F , h .

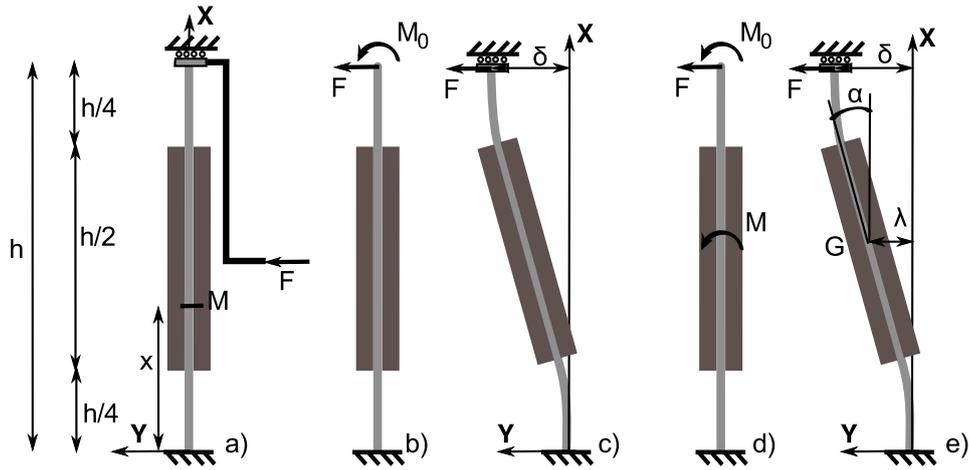


FIGURE 5 – Version modifiée des lames élastiques

Question 1.2.4 En appliquant le théorème de Ménébréa (la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une inconnue hyperstatique est nulle) montrer que l'expression de M_0 en fonction de F et h est :

$$M = -\frac{Fh}{2}$$

Question 1.2.5 En déduire que l'expression de δ en fonction de E , I , F et h est :

$$\delta = \frac{7Fh^3}{96EI}$$

Donner l'expression de k en fonction de E , I et h .

Question 1.2.6 En déduire la raideur globale K du système des trois lames, sachant qu'elles sont toutes de même géométrie.

Section 1.3 Etude du comportement dynamique de l'équipage mobile

Dans cette section, on construit le modèle dynamique de l'équipage mobile. Compte-tenu de la technique de rigidification des lames proposée dans la section précédente, la masse et l'inertie des lames ne peuvent plus être négligées. On ne considère que la masse m et l'inertie en rotation autour de l'axe (G, Z) , J de la partie rigidifiante de la lame de hauteur $(h/2)$.

Question 1.3.1 Sur le modèle poutre de la figure 5 montrer que le déplacement λ du centre de gravité G de la partie mobile est égal à la moitié du déplacement δ .

Question 1.3.2 Afin de déterminer la rotation de la partie rigide, on utilise le théorème de Castigliano : pour déterminer la rotation de la section en un point où aucun moment ponctuel n'est appliqué, on impose un moment virtuel ; Ainsi l'angle de rotation cherché est égal à la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à ce moment lorsque celui-ci est nul. En utilisant la configuration proposée sur la figure 5-d, exprimer le moment fléchissant $M_f(x)$ en tout point M d'abscisse x le long de la lame en fonction de M_0 , M , F , h et x .

Question 1.3.3 Donner l'expression de l'énergie de déformation E_d de cette lame en fonction de E , I , M , M_0 , F , h .

Question 1.3.4 En appliquant le théorème de Castigliano et en utilisant le résultat de la question 1.2.4, donner l'expression de α en fonction de E , I , F , h .

Question 1.3.5 En utilisant le résultat de la question 1.2.5 donner l'expression de α en fonction de δ et h .

Pour caractériser le mouvement de l'équipage mobile, on appelle $X(t)$ la position axiale mesurée au cours du temps par le capteur LVDT. Sachant que l'équipage est indéformable, le déplacement δ observé sur chacune des lames flexibles est égal à $X(t)$.

Question 1.3.6 Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c de l'ensemble équipage mobile plus lames élastiques en fonction de M_m , M_e , m , J , h et de la vitesse de déplacement de l'axe mobile $\dot{X}(t)$.

Question 1.3.7 En déduire la masse équivalente du système, c'est-à-dire la masse M telle que l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{X}^2$$

Question 1.3.8 Donner alors l'équation différentielle du mouvement de l'équipage mobile de masse équivalente M , soumis uniquement à un effort de poussée variable dans le temps $F_p(t)$, aux forces de rappel des lames élastiques et à un effort d'amortissement visqueux $-C\dot{X}(t)$. La position de l'équipage mobile étant la fonction $X(t)$.

Section 1.4 Fonctionnement du système de d'étalonnage

La sensibilité de la balance aux conditions de fonctionnement nécessite de réaliser son étalonnage après chaque essai. La relation entre poussée du propulseur et intensité résultante est évaluée en simulant une poussée *fictive* connue sur la balance grâce à un ensemble de billes venant en contact avec des galets en liaison pivot avec la partie mobile. La position de ces billes est commandée par des électroaimants qui viennent faire coulisser les supports des plaquettes de maintien des billes (figure 6).

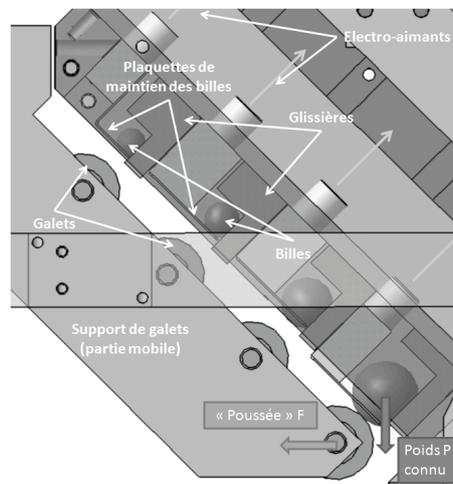


FIGURE 6 – Aperçu du système d'étalonnage

Dans cette section, on cherche à déterminer le lien entre le poids d'une bille et la force de poussée fictive F générée. La figure 7 schématise le système d'étalonnage en fonctionnement. Une bille **3** est en contact avec le galet **2** et un plan incliné à 45° fixe. Le support du galet **1** transmet la poussée fictive F à l'équipage mobile.

On note m_b le poids de la bille. Toutes les liaisons sont supposées parfaites sans frottement. On note g l'accélération de la gravité. R_g et R_b sont les rayons respectifs du galet et de la bille.

Question 1.4.1 Etablir le graphe de structure du système.

On considère la situation représentée sur la figure 7 où le chariot mobile est maintenu à la position $X = 0$.

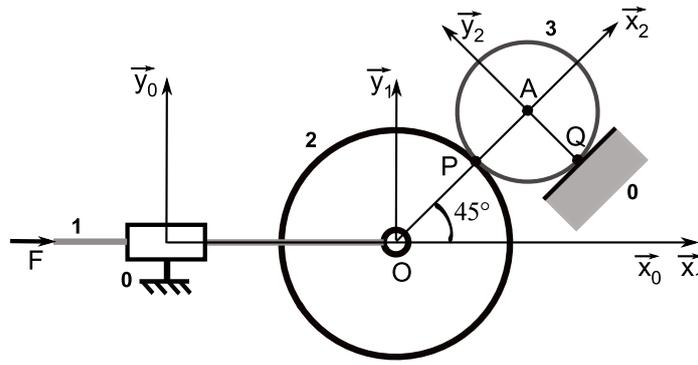


FIGURE 7 – Schéma du système d'étalonnage

Question 1.4.2 Ecrire le principe fondamental de la statique appliqué à la bille. Utiliser une de ces équations pour déterminer l'effort normal de contact entre la galet et la bille N_{23} en fonction de la masse de la bille.

Question 1.4.3 Ecrire le principe fondamental de la statique appliqué à l'ensemble support-galet. Utiliser une de ces équations pour déterminer l'effort F en fonction de l'effort normal de contact N_{23} .

Question 1.4.4 En déduire la relation en l'effort F et la masse de la bille.

Lorsque le galet se déplace sous l'action du poids des billes, la configuration devient celle représentée sur la figure 8. On note $\vec{O'O} = X\vec{x}_0$.

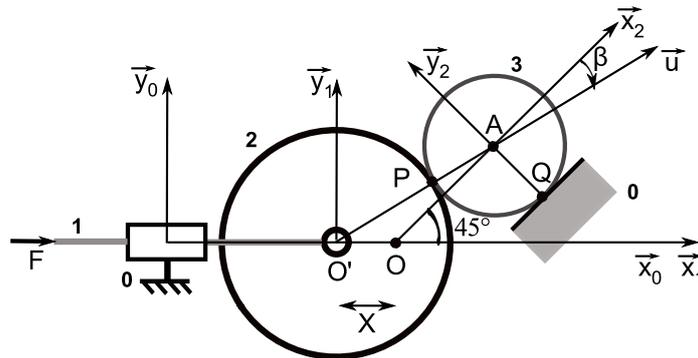


FIGURE 8 – Schéma du système d'étalonnage

Question 1.4.5 Exprimer la relation entre l'angle β et X .

Question 1.4.6 En reprenant la stratégie des questions précédentes, exprimer l'effort F en fonction du poids des billes et de β .

Deuxième partie : Automatique

Cette partie concerne l'étude du système d'asservissement en position de l'équipage mobile

Pour contrôler le déplacement de la balance engendré par la poussée du moteur plasmique, on réalise un asservissement de type « régulation » en position autour d'une valeur de référence correspondant à une poussée nulle. Sur le système, la position est mesurée par le capteur de déplacement de type LVDT ; la mesure délivrée par ce capteur, comparée à la consigne de position, permet d'alimenter le moteur linéaire à aimants permanents via un amplificateur. Ce moteur génère un effort sur l'équipage mobile tendant à s'opposer à la poussée du moteur plasmique et donc ramenant la partie mobile de la balance dans sa position de référence. L'effort de poussée du moteur plasmique peut être vu comme une seconde entrée sur le système ou une perturbation. La mesure de la poussée du moteur est estimée en régime établi par la mesure du courant dans le moteur linéaire.

Le nouveau moteur plasmique de type PPS5000 est donné pour un effort de poussée maximale de 525mN. On décide de dimensionner le système mécanique et l'asservissement pour une valeur de poussée maximale sans dégradation de 800mN qui correspondrait à un déplacement horizontal de 1,2mm sans effort opposé du moteur linéaire. Lors de la reconception du système, seules les lames flexibles ont été redimensionnées (voir première partie). Il est décidé de conserver le capteur de mesure de la position axiale de la partie mobile de la balance étant donné sa course limitée de 1,25 mm.

Dans la suite du sujet, la variable du domaine de Laplace est notée p .

Section 2.1 Etude de l'architecture d'asservissement

On souhaite modéliser l'asservissement sous forme linéaire à l'aide de schéma-blocs. Les sous-fonctions (ou blocs) représentant chaque composant seront notés respectivement H_{LVDT} , $H_{amplificateur}$, H_{moteur} et $H_{balance}$ pour le capteur de mesure, l'amplificateur, le moteur à aimants permanents et la partie mobile de la balance.

Question 2.1.1 Compléter, en le recopiant sur la copie, le schéma bloc (figure 9) de l'asservissement en positionnant les différentes sous fonctions. Indiquer sur chaque entrée/sortie des blocs la nature des informations transitant.

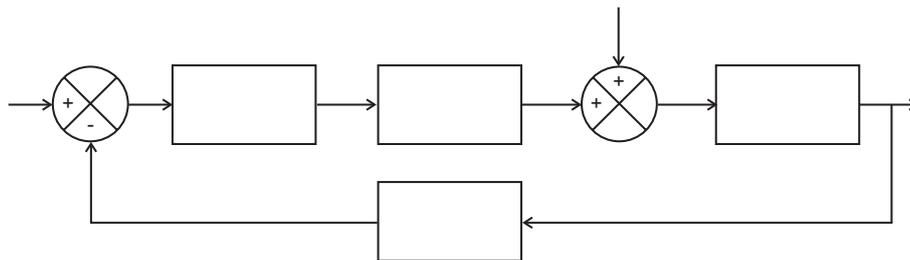


FIGURE 9 – Schéma bloc modélisant la structure de l'asservissement

Question 2.1.2 Exprimer sous la forme suivante, la position de la balance $X(p)$ en fonction de la consigne de position $U_p(p)$ et de l'effort généré par le moteur plasmique $F_p(p)$.

$$X(p) = H_1(p).U_p(p) + H_2(p).F_p(p)$$

Question 2.1.3 On suppose que la position de référence de la partie mobile est l'origine $X = 0mm$. En déduire la valeur de la consigne donnée pour la régulation et donc la simplification de l'expression de la fonction de transfert précédente.

Section 2.2 Calcul de la fonction de transfert du système en boucle ouverte

La réponse du capteur LVDT peut être considérée comme linéaire sur la plage de fonctionnement. Ainsi, sa fonction de transfert est un gain de valeur $K_r = 4V/mm$. La carte du module de puissance est assimilable à une constante d'amplification de facteur 10. Le moteur linéaire est régi par les équations suivantes :

$$F(t) = K_b \cdot I(t) \quad ; \quad U(t) = R_b \cdot I(t) + L_b \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

avec :

- $K_b = 2,66 \cdot 10^{-3} N/A$: la constante de transformation effort/courant dans le moteur
- $R_b = 3,2 \Omega$: la résistance des bobinages
- $L_b = 23,5 \cdot 10^{-6} H$: l'inductance des bobinages.

Le comportement mécanique étudié dans la partie 1 permet d'aboutir aux équations du mouvement de la balance c'est dire la relation entre la position X et l'ensemble des actions mécaniques noté F . La fonction de transfert équivalente est :

$$H_{balance} = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{K + M \cdot p^2}$$

avec :

- $K = 666,36 N \cdot m^{-1}$: la raideur équivalente du système à lames flexibles
- $M = 23 kg$: la masse équivalente de la partie mobile de la balance.

Question 2.2.1 Exprimer littéralement dans le domaine de Laplace la fonction de transfert du moteur linéaire H_{moteur} . Faire les applications numériques.

Question 2.2.2 Effectuer le tracé du diagramme asymptotique de Bode de cette fonction de transfert ; déterminer la pulsation de coupure.

Question 2.2.3 Montrer, par le calcul littéral puis numérique que le calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte du système aboutit à :

$$H_{BO}(p) = \frac{1,97 \cdot 10^{-1}}{(p^2 + 28,8) \cdot (p + 1,36 \cdot 10^5)}$$

Question 2.2.4 Les sollicitations générées par le moteur plasmique se situent dans une plage de [0-100Hz]. En déduire l'hypothèse simplificatrice que l'on peut apporter sur la fonction de transfert en boucle ouverte.

Section 2.3 Analyse du comportement du système non corrigé en boucle ouverte

Le tracé de la boucle ouverte dans le plan de Bode est donné sur la figure 10.

Question 2.3.1 Que remarque-t-on sur le comportement simulé ? Un tel comportement est-il compatible avec le cahier des charges du système ? Pourquoi ?

Question 2.3.2 Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase (les tracer sur la BO). Conclure quand à la stabilité du système avec un tel réglage.

On observe par simulation la réponse temporelle du système en boucle fermée pour évaluer l'influence d'une variation de l'effort de poussée du moteur. Pour cela, on génère une consigne de type échelon et de valeur $800mN$ correspondant au pire des cas. La réponse temporelle est donnée par la figure 11.

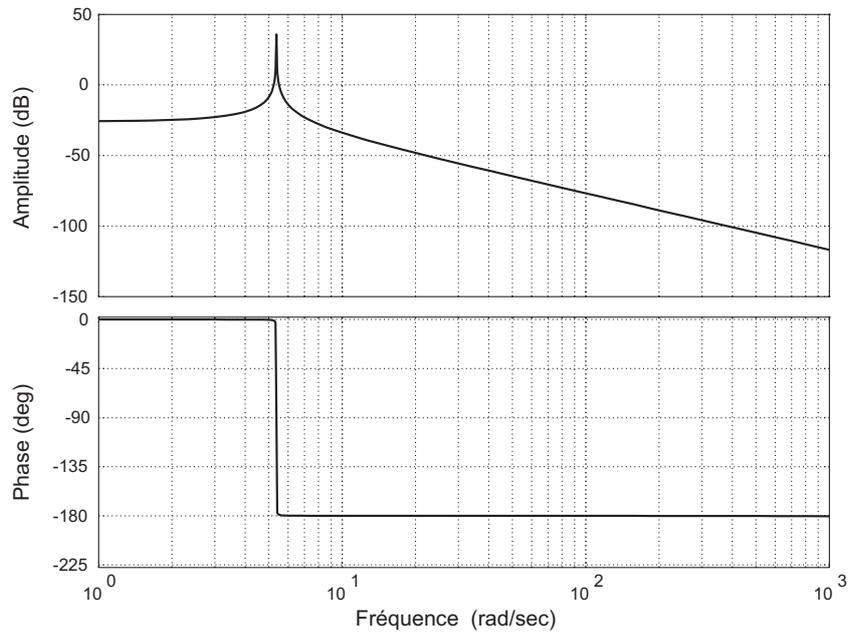


FIGURE 10 – Tracé de la FTBO dans le plan de Bode

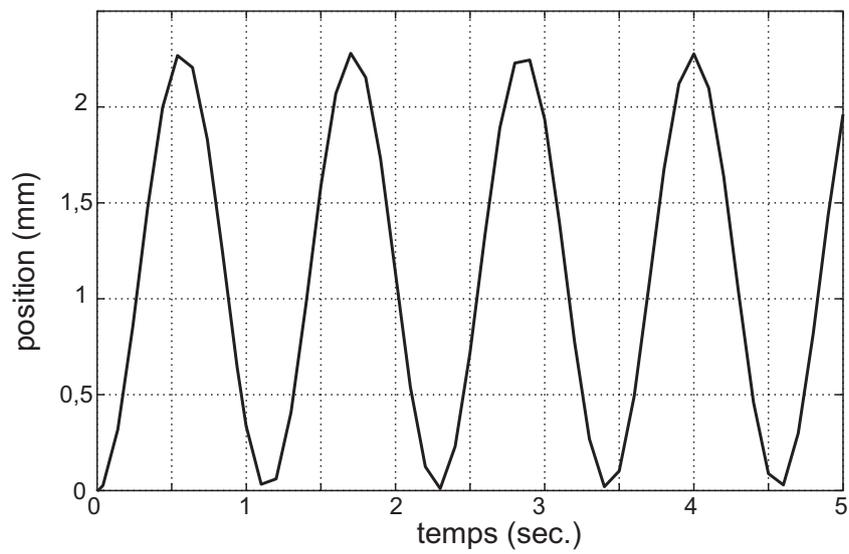


FIGURE 11 – Réponse temporelle du système en boucle fermée

Question 2.3.3 Commenter la réponse temporelle obtenue vis-à-vis de la question précédente et du cahier des charges.

Section 2.4 Réglage d'un correcteur pour l'asservissement du système

On choisit d'implémenter un correcteur de type proportionnel, intégral et dérivé donné sous la forme

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d}{1 + \frac{T_d}{10} p} \right)$$

où K_c représente la constante pour l'action proportionnelle et T_i le temps caractéristique de l'action intégrale. L'action dérivée, de constante T_d , est donnée avec un filtre du premier ordre destiné à atténuer l'effet du bruit lié aux hautes fréquences dans la commande du PID.

Question 2.4.1 Dessiner sous forme de schéma-blocs la structure modifiée de l'asservissement : positionner le bloc modélisant le correcteur, de fonction de transfert $H_{correcteur}$.

Question 2.4.2 Rappeler succinctement le rôle de chacune de ces actions du correcteur.

Question 2.4.3 Montrer que sous certaines conditions, il est possible de découpler les actions intégrale et dérivée, c'est à dire mettre le correcteur sous la forme

$$C(p) = K_c \frac{(1 + T_1 p) \cdot (1 + T_2 p)}{(T_i p) \cdot (1 + \frac{T_d}{10} p)}$$

Exprimer alors les expressions des constantes de temps T_1 et T_2 en fonction des paramètres K_c , T_i et T_d .

On choisit comme réglage les valeurs suivantes :

$$K_c = 103.5 \quad T_i = 0.24 \quad T_d = 0.96$$

Question 2.4.4 Les conditions évoquées à la question précédente sont-elles remplies ? Effectuer le tracé du diagramme de Bode pour le correcteur seul. Justifier les choix des valeurs numériques pour les trois paramètres K_c , T_i , T_d vis à vis du système.

La figure 12 représente la réponse indicielle en boucle fermée pour le système une fois la correction implantée

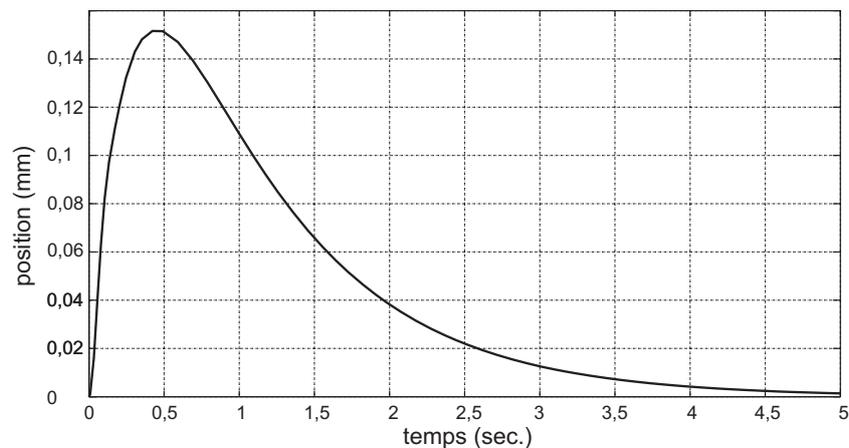


FIGURE 12 – Réponse indicielle du système en boucle fermée

Question 2.4.5 Conclure quant aux effets du correcteur sur la réponse temporelle. Le cahier des charges est-il atteint ? Commenter la courbe.

La figure 13 compare l'effort de poussée généré par le moteur plasmique à la mesure de l'effort basée sur le courant dans le moteur linéaire.

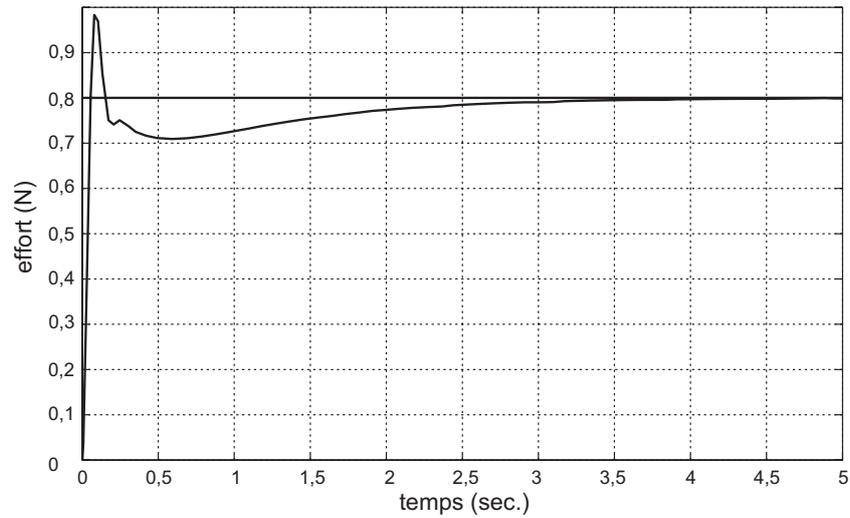


FIGURE 13 – Comparaison de l'effort de poussée généré par le moteur plasmique à la mesure de l'effort réalisée par l'intermédiaire du courant dans le moteur linéaire

Question 2.4.6 Donner les précautions à prendre concernant le protocole de mesure des valeurs de poussée suivant différents régimes du moteur plasmique.