C31212

École Normale Supérieure de Cachan
61, avenue du Président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3$^{\text{ème}}$ année**
Informatique
Session 2011

INFORMATIQUE 2

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé
Aucun dictionnaire n'est autorisé
L'usage de toute calculatrice est interdit

Ce sujet se propose d'étudier une sous-classe des automates à pile, les automates à pile avec visibilité. La famille de langages associée possède les mêmes propriétés de clôture que les langages réguliers, et la plupart des problèmes de décision (vide, universalité, inclusion) sont décidables. Une première partie présente le modèle ainsi que quelques exemples. La seconde partie traite des propriétés de clôture et des problèmes de décision. Enfin, la troisième partie considère des transducteurs définis à l'aide de ce modèle et se penche sur plusieurs problèmes dont celui de la fonctionnalité.

La notation tiendra compte de la rigueur des raisonnements et de la clarté des explications. Chaque question pourra être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

Des étoiles (une à quatre) indiquent la difficulté des questions. Le but est d'aider le candidat à apprécier le niveau des questions et non de le décourager à s'y atteler. Il ne faut par contre pas y voir un barème au sens strict du terme.

Partie 1. Préliminaires

On commence par quelques définitions et notations qui seront valables pour l'intégralité du sujet. On donne ensuite quelques exemples et propriétés de base utiles dans la suite.

Un **alphabet** est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **lettres**. Un **mot** de longueur n sur un alphabet A est une concaténation finie $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ de n lettres de l'alphabet (c.-à-d. $a_i \in A$ pour tout $i = 1, \ldots, n$). On notera A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A, et le mot vide sera noté ε.

Un **alphabet partitionné** est un triplet $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$ où A_a (a pour *appel*), A_r (r pour *retour*) et A_ℓ (ℓ pour *local*) sont des alphabets (pouvant être vides). Si $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$ est un alphabet partitionné, on notera $A = A_a \cup A_r \cup A_\ell$ leur union.

Un **automate à pile avec visibilité (APV)** est un sextuplet $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, \Gamma, I, F, \Delta)$ où Q est un ensemble fini d'états de contrôle, $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$ est un alphabet partitionné d'entrée, Γ est un alphabet de pile contenant un symbole spécial (dit de fond de pile) noté $\perp$, $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et

$$\Delta \subseteq (Q \times A_a \times Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})) \cup (Q \times A_r \times \Gamma \times Q) \cup (Q \times A_\ell \times Q)$$

est la relation de transition.

Une configuration d'un APV $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, \Gamma, I, F, \Delta)$ est un couple (q, σ) où $q \in Q$ est un état et $\sigma \in (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ est un mot qualifié de **mot de pile** (ainsi un mot de pile est une suite — pouvant être vide — de lettres différentes de $\perp$ suivie du symbole $\perp$). Une configuration est initiale si elle est de la forme $(q_i, \perp)$ avec $q_i \in I$. Une configuration est finale si elle est de la forme (q_f, σ) avec $q_f \in F$.

Étant donnés un APV $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, \Gamma, I, F, \Delta)$, un mot $u = a_0 a_1 \cdots a_n$ et une configuration (q, σ), on définit un **calcul** de $\mathcal{A}$ sur u depuis (q, σ) comme une suite de configurations de $\mathcal{A}$, $(q_0, \sigma_0), (q_1, \sigma_1), \ldots, (q_{n+1}, \sigma_{n+1})$, telle que :

- $(q_0, \sigma_0) = (q, \sigma)$.
- Pour tout $i = 0, \ldots, n$:

– Si $a_i \in A_a$, alors il existe $\gamma \in \Gamma \setminus \{\bot\}$ tel que $(q_i, a_i, q_{i+1}, \gamma) \in \Delta$ et $\sigma_{i+1} = \gamma \cdot \sigma_i$. Dans ce cas on empile donc un symbole.
– Si $a_i \in A_r$, alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $(q_i, a_i, \gamma, q_{i+1}) \in \Delta$ et

$$\begin{cases} \sigma_i = \gamma \cdot \sigma_{i+1} & \text{si } \gamma \neq \bot \\ \sigma_i = \sigma_{i+1} = \bot & \text{si } \gamma = \bot \end{cases}$$

Dans ce cas on dépile le symbole en sommet de pile ou on laisse la pile inchangée si elle est réduite au fond de pile.
– Si $a_i \in A_\ell$, alors $(q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta$ et $\sigma_{i+1} = \sigma_i$. Dans ce cas la pile est inchangée.

Un mot $u \in A^*$ est **accepté** par l'automate $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe un calcul de $\mathcal{A}$ sur u depuis une configuration initiale qui se termine dans une configuration finale. L'ensemble $L(\mathcal{A})$ des mots acceptés par $\mathcal{A}$ est appelé **langage accepté** par $\mathcal{A}$. Un **langage avec visibilité** sur un alphabet A est un ensemble de mots $K \subseteq A^*$ pour lequel il existe un alphabet partitionné $\widetilde{B} = (B_a, B_r, B_\ell)$ avec $A = B$ et un APV $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{B}, \Gamma, I, F, \Delta)$ tel que $L(\mathcal{A}) = K$.

Un APV $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, \Gamma, I, F, \Delta)$ est **déterministe** s'il possède un unique état initial (c'est à dire que $|I| = 1$) et si, pour tout $q \in Q$, on a :
– pour tout $a \in A_a$, il y a au plus un élément (q, a, q', γ) dans Δ ;
– pour tout $a \in A_r$ et tout $\gamma \in \Gamma$, il y a au plus un élément (q, a, γ, q') dans Δ ;
– pour tout $a \in A_\ell$, il y a au plus un élément (q, a, q') dans Δ.

Question 1 (*). Soit $\widetilde{A} = (\{a\}, \{b\}, \{\sharp\})$ et soit $L = \{a^n \sharp b^n \mid n \geq 0\}$. Montrer qu'il existe un APV d'alphabet d'entrée $\widetilde{A}$ qui accepte le langage L.

Question 2 (*). Soit $K = \{a^n \sharp a^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, \sharp\}^*$. Montrer que K n'est pas un langage avec visibilité.

Fixons un alphabet partitionné $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$. On définit les mots **bien formés** sur $\widetilde{A}$ comme suit :
– les mots de A_ℓ^* sont bien formés ;
– si w_1 et w_2 sont bien formés il en est de même pour $w_1 w_2$;
– si w est bien formé il en est de même pour awr avec $a \in A_a$ et $r \in A_r$.

Un mot $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ est dit **quasi bien formé** si, pour tout $1 \leq i \leq n$ tel que $a_i \in A_a$, il existe $j > i$ tel que $a_j \in A_r$ et $a_{i+1} \cdots a_{j-1}$ est bien formé. En particulier, tout mot bien formé est quasi bien formé.

Ainsi, si $\widetilde{A} = (\{(\}, \{)\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -, \times, /\})$, les mots bien formés sur $\widetilde{A}$ sont les expressions arithmétiques bien parenthésées ; les mots quasi bien formés sont les expressions arithmétiques dont toutes les parenthèses ouvrantes sont refermées (mais il peut exister des parenthèses fermantes qui ne ferment aucune parenthèse ouvrante).

Question 3 (**). Montrer que, pour tout alphabet partitionné $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$, l'ensemble des mots bien formés sur $\widetilde{A}$ est accepté par un APV déterministe.

Question 4 (**). Montrer que, pour tout alphabet partitionné $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$, l'ensemble des mots quasi bien formés sur $\widetilde{A}$ est accepté par un APV déterministe.

Partie 2. Propriétés

On prouve ici que les APV possèdent les mêmes propriétés de clôture que les automates finis. On montre également que l'on peut toujours déterminiser un APV. Enfin, on s'intéresse à la complexité des problèmes de décision classiques (vide, universalité, inclusion).

Question 5 (*). Soient L_1 et L_2 deux langages avec visibilité pour le même alphabet partitionné. Montrer que $L_1 \cup L_2$ est également un langage avec visibilité.

Question 6 (**). Soient L_1 et L_2 deux langages avec visibilité pour le même alphabet partitionné. Montrer que $L_1 \cap L_2$ est également un langage avec visibilité.

Question 7 (**). Pour un alphabet partitionné $\widetilde{A}$ donné, montrer que l'ensemble des langages avec visibilité pour l'alphabet $\widetilde{A}$ qui sont reconnus par des APV **déterministes** est fermé pour les opérations booléennes (union, intersection et la complémentation).

Question 8 (*). Soit $\mathcal{A}$ un APV. Soit L l'ensemble des mots u tel que $\mathcal{A}$ possède un calcul sur u depuis une configuration initiale et se terminant dans une configuration finale dont le mot de pile est $\perp$. Montrer que L est un langage avec visibilité.

Question 9 (**). Soient L_1 et L_2 deux langages avec visibilité pour le même alphabet partitionné. Montrer que $L_1 \cdot L_2 = \{u_1 \cdot u_2 \mid u_1 \in L_1 \text{ et } u_2 \in L_2\}$ est également un langage avec visibilité.

Question 10 (***). Soit L un langage avec visibilité. Montrer que

$$L^* = \{u_1 u_2 \cdots u_i \mid i \geq 0 \text{ et } u_k \in L \text{ pour tout } 1 \leq k \leq i\}$$

est également un langage avec visibilité.

Question 11 (**). Montrer que, pour tout alphabet partitionné $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$, tout mot w peut se décomposer de façon unique en $w = w_1 a_1 w_2 a_2 \cdots w_n a_n w_{n+1}$ pour un $n \geq 0$ et où

- w_1 est un mot quasi bien formé ;
- pour tout $1 \leq i \leq n$, w_{i+1} est un mot bien formé ;
- pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i \in A_a$.

Question 12 (****). L'objet de cette question est de prouver que l'on peut déterminiser les APV. Nous fixons donc un APV $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, \Gamma, I, F, \Delta)$ avec $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$, et nous allons définir un nouvel APV (déterministe cette fois) $\mathcal{A}'$. L'objet de la question n'est donc pas de trouver $\mathcal{A}'$ mais de prouver qu'il accepte le même langage que $\mathcal{A}$.

Dans la suite, on notera $Id_Q = \{(q, q) \mid q \in Q\}$.

On définit l'APV (déterministe) $\mathcal{A}' = (Q', \widetilde{A}, \Gamma', I', F', \Delta')$ comme suit :

- $Q' = 2^{Q \times Q} \times 2^Q$.

- $I' = \{(Id_Q, I)\}$.
- $F' = \{(S, R) \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.
- $\Gamma' = \{(S, R, a) \mid (S, R) \in Q'$ et $a \in A_a\}$.
- Δ est donnée par :
  - Pour tout $a \in A_a$, $((S, R), a, (Id_Q, R'), (S, R, a))) \in \Delta'$ avec $R' = \{q' \mid \exists q \in R, \gamma \in \Gamma \ : \ (q, a, q', \gamma) \in \Delta\}$.
  - Pour tout $a \in A_r$, $((S, R), a, (S', R', a'), (S'', R''))) \in \Delta'$ si (S'', R'') satisfait ce qui suit. Soit $T = \{(q, q') \mid \exists q_1, q_2 \in Q, \ \gamma \in \Gamma \ : \ (q, a', q_1, \gamma) \in \Delta, \ (q_1, q_2) \in S, \ (q_2, a, \gamma, q') \in \Delta\}$. Alors $S'' = \{(q, q') \mid \exists q_3 \ : \ (q, q_3) \in S', \ (q_3, q') \in T\}$ et $R'' = \{q' \mid \exists q \in R', \ (q, q') \in T\}$.
  - Pour tout $a \in A_r$, $((S, R), a, \perp, (S', R'))) \in \Delta'$ si $S' = \{(q, q') \mid \exists q'' \ : \ (q, q'') \in S, \ (q'', a, \perp, q') \in \Delta\}$, $R' = \{q' \mid \exists q \in R \ : \ (q, a, \perp, q') \in \Delta\}$.
  - Pour tout $a \in A_\ell$, $((S, R), a, (S', R')) \in \Delta'$ avec $S' = \{(q, q') \mid \exists q'' \ : \ (q, q'') \in S, \ (q'', a, q') \in \Delta\}$ et $R' = \{q' \mid \exists q \in R \ : \ (q, a, q') \in \Delta\}$.

Soit u un mot quasi bien formé sur $\widetilde{A}$. On définit

$$\tau(u) = \{(q, q') \mid \text{il existe un calcul de } \mathcal{A} \text{ sur } u \text{ depuis } (q, \perp) \text{ se terminant en } (q', \perp)\}$$

Soit u un mot quelconque sur $\widetilde{A}$. On définit

$$\rho(u) = \{q \in Q \mid \text{il existe un calcul de } \mathcal{A} \text{ sur } u \text{ depuis une configuration initiale et se terminant dans une configuration de la forme } (q, \sigma)\}$$

(a) Soit un mot $w = w_1 a_1 w_2 a_2 \cdots w_n a_n w_{n+1}$ décomposé comme à la question précédente. Montrer qu'après avoir lu w, $\mathcal{A}'$ est dans la configuration

$$((S, R), (S_n, R_n, a_n) \cdots (S_1, R_1, a_1) \perp)$$

où :
- pour tout $1 \leq i \leq n$, $S_i = \tau(w_i)$;
- pour tout $1 \leq i \leq n$, $R_i = \rho(w_1 a_1 w_2 \cdots a_{i-1} w_i)$ (où $w_1 a_1 w_2 \cdots a_{i-1} w_i = w_1$ si $i = 1$) ;
- $S = \tau(w_{n+1})$;
- $R = \rho(w)$.

(b) Conclure que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ acceptent le même langage.

Question 13 (*). Expliquer pourquoi, étant donné un APV $\mathcal{A}$, on peut décider en temps polynomial en la taille de $\mathcal{A}$ si $L(\mathcal{A}) = \emptyset$

Question 14 (*). Soit un APV $\mathcal{A}$ sur un alphabet $\widetilde{A}$. Donner un algorithme (dont on précisera la complexité) pour décider si $L(\mathcal{A}) = A^*$.

Question 15 (*). Soient deux APV $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur un même alphabet $\widetilde{A}$. Donner un algorithme (dont on précisera la complexité) pour décider si $L(\mathcal{A}_1) \subseteq L(\mathcal{A}_2)$.

Partie 3. Transducteur à pile avec visibilité

On étend le modèle des APV en ajoutant des sorties, obtenant ainsi un modèle de transducteur. Ainsi, à la lecture d'un mot en entrée, un mot en sortie est produit. Le modèle étant non-déterministe, il définit une relation entre les mots sur l'alphabet d'entrée et les mots sur l'alphabet de sortie.

Un **transducteur à pile avec visibilité (TPV)** est un septuplet $\mathcal{A} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$ où Q est un ensemble fini d'états de contrôle, $\widetilde{A} = (A_a, A_r, A_\ell)$ est un alphabet partitionné d'entrée, B est un alphabet de sortie, Γ est un alphabet de pile contenant un symbole spécial (dit de fond de pile) noté $\perp$, $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et

$$\Delta \subseteq (Q \times A_a \times B^* \times Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})) \cup (Q \times A_r \times B^* \times (\Gamma \setminus \{\perp\}) \times Q) \cup (Q \times A_\ell \times B^* \times Q)$$

est la relation de transition. On exige de plus que Δ soit finie.

Une configuration d'un TPV $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$ est un couple (q, σ) où $q \in Q$ est un état et $\sigma \in (\Gamma \setminus \{\perp\})^*\perp$ est un mot qualifié de **mot de pile**. Une configuration est initiale si elle est de la forme $(q_i, \perp)$ avec $q_i \in I$. Une configuration est finale si elle est de la forme $(q_f, \perp)$ avec $q_f \in F$. Notez, à la différence des APV, que pour être finale, une configuration doit avoir **un mot de pile réduit à** $\perp$.

Étant donnés un TPV $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$, un mot $u = a_0 a_1 \cdots a_n$, une configuration (q, σ) et un mot $v \in B^*$, on définit un **calcul** de $\mathcal{A}$ sur u depuis (q, σ) de sortie v comme une suite de configurations de $\mathcal{A}$, $(q_0, \sigma_0), (q_1, \sigma_1), \ldots, (q_{n+1}, \sigma_{n+1})$, telle que :

- $(q_0, \sigma_0) = (q, \sigma)$.
- Pour tout $i = 0, \ldots, n$:
  - Si $a_i \in A_a$, alors il existe $v_i \in B^*$ et $\gamma \in \Gamma \setminus \{\perp\}$ tels que $(q_i, a_i, v_i, q_{i+1}, \gamma) \in \Delta$ et $\sigma_{i+1} = \gamma \cdot \sigma_i$.
  - Si $a_i \in A_r$, alors il existe $v_i \in B^*$ et $\gamma \in \Gamma \setminus \{\perp\}$ tels que $(q_i, a_i, v_i, \gamma, q_{i+1}) \in \Delta$ et $\sigma_i = \gamma \cdot \sigma_{i+1}$.
  - Si $a_i \in A_\ell$, alors il existe $v_i \in B^*$ tel que $(q_i, a_i, v_i, q_{i+1}) \in \Delta$ et $\sigma_{i+1} = \sigma_i$. Dans ce cas la pile est inchangée.
- $v = v_0 \cdots v_n$.

Notez, qu'à la différence des APV, un TPV **ne peut lire une lettre de** A_r si la pile est réduite au fond de pile.

Un TPV $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$ définit une relation $[|\mathcal{T}|] \subseteq A^* \times B^*$ comme suit : $(u, v) \in [|\mathcal{T}|]$ si et seulement s'il existe un calcul de $\mathcal{T}$ sur u depuis une configuration initiale qui se termine dans une configuration finale et de sortie v.

Question 16 (**). Soit $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$. Montrer que le domaine de $\mathcal{T}$, $Dom(\mathcal{T}) = \{u \mid \exists v,\ (u, v) \in [|\mathcal{T}|]\}$ est un langage avec visibilité dont tous les mots sont bien formés.

Question 17 (**). Soit un TPV $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$. Montrer que son co-domaine $CoDom(\mathcal{T}) = \{v \mid \exists u,\ (u, v) \in [|\mathcal{T}|]\}$ est un langage algébrique.

Question 18 (**). On souhaite montrer que les TPV ne sont pas clos par composition. Plus précisément, soit $\widetilde{A} = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{r_1, r_2, r_3\}, \emptyset)$ un alphabet partitionné, et soit $l_i = a_i r_i$ pour tout $1 \leq i \leq 3$.

(a) Montrer qu'il existe un TPV $\mathcal{T}_1$ tel que $[|\mathcal{T}_1|] = \{(a_1^n r_2^n l_3^k, a_1^n l_2^n r_3^k) \in A^* \times A^* \mid n, k \geq 0\}$.

(b) Montrer qu'il existe un TPV $\mathcal{T}_2$ tel que $[|\mathcal{T}_2|] = \{(u, u) \mid u \in A^*,\ u \text{ bien formé}\}$.

(c) Montrer que la relation

$$R = \{(u, v) \in A^* \times A^* \mid \exists w \in A^* \text{ t.q. } (u, w) \in [|\mathcal{T}_1|] \text{ et } (w, v) \in [|\mathcal{T}_2|]\}$$

ne peut être obtenue comme une relation définie par un TPV.

Question 19 (**). Soit un TPV $\mathcal{T}$ dont l'alphabet d'entrée et l'alphabet de sortie sont identiques. On définit dans ce cas l'inverse de $[|\mathcal{T}|]$ par $[|\mathcal{T}|]^{-1} = \{(v, u) \mid (u, v) \in [|\mathcal{T}|]\}$. Existe-t-il toujours un TPV $\mathcal{T}^{-1}$ tel que $[|\mathcal{T}|]^{-1} = [|\mathcal{T}^{-1}|]$?

Question 20 (***). Soit un TPV $\mathcal{T}$. Montrer, qu'étant donné $(u, v) \in A^* \times B^*$, on peut décider en temps polynomial (en la taille de $\mathcal{T}$ et en les longueurs de u et v) si $(u, v) \in [|\mathcal{T}|]$.

Une TPV $\mathcal{T}$ d'alphabet d'entrée A est **fonctionnel** si pour tout $u \in A^*$ il existe au plus un v tel que $(u, v) \in [|\mathcal{T}|]$.

On rappelle que pour deux alphabets A et B, une fonction $\Phi : A^* \to B^*$ est un morphisme si $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon$ et si pour tout $u, v \in A^*$ on a $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$. Ainsi, un morphisme de A^* dans B^* est uniquement défini par ses valeurs sur A. Fixons Φ_1 et Φ_2 deux morphismes de $A^* \to B^*$, et un langage $L \subseteq A^*$. On écrira $\Phi_1 \sim_L \Phi_2$ si et seulement si, pour tout $u \in L,\ \Phi_1(u) = \Phi_2(u)$. On admettra le résultat suivant :

Théorème (Plandowski, 1994) Étant donnés deux morphismes $\Phi_1, \Phi_2 : A^* \to B^*$, et un langage algébrique $L \subseteq A^*$, on peut décider en temps polynomial si $\Phi_1 \sim_L \Phi_2$.

Soit un TPV $\mathcal{T} = (Q, \widetilde{A}, B, \Gamma, I, F, \Delta)$. On définit son **carré** $\mathcal{T}^2$ comme le TPV $\mathcal{T}^2 = (Q \times Q, \widetilde{A}, C, \Gamma \times \Gamma, I \times I, F \times F, \Delta^2)$ où l'on a :

- $C = (B \cup \{\varepsilon\}) \times (B \cup \{\varepsilon\})$: on va donc produire en sortie un mot dont les lettres sont des paires de lettres de $B \cup \{\varepsilon\}$; en considérant la concaténation composante par composante, on pourra alors voir ce mot comme une paire de mots sur l'alphabet B.
- Pour tout $a \in A_a$, $((q_1, q_2), a, (u_1, u_2), (q_1', q_2'), (\gamma_1, \gamma_2)) \in \Delta^2$ si et seulement si $(q_1, a, u_1, q_1', \gamma_1) \in \Delta$ et $(q_2, a, u_2, q_2', \gamma_2) \in \Delta$.
- Pour tout $a \in A_r$, $((q_1, q_2), a, (u_1, u_2), (\gamma_1, \gamma_2), (q_1', q_2')) \in \Delta^2$ si et seulement si $(q_1, a, u_1, \gamma_1, q_1') \in \Delta$ et $(q_2, a, u_2, \gamma_2, q_2') \in \Delta$.
- Pour tout $a \in A_\ell$, $((q_1, q_2), a, (u_1, u_2), (q_1', q_2')) \in \Delta^2$ si et seulement si $(q_1, a, u_1, q_1') \in \Delta$ et $(q_2, a, u_2, q_2') \in \Delta$.

On définit maintenant deux morphismes Φ_1 et Φ_2 de $((B \cup \{\varepsilon\}) \times (B \cup \{\varepsilon\}))^*$ dans B^*, en posant $\Phi_1((a_1, a_2)) = a_1$ et $\Phi_2((a_1, a_2)) = a_2$ pour tout $a_1, a_2 \in B \cup \{\varepsilon\}$.

Question 21 (****). Montrer que $\mathcal{T}$ est fonctionnel si et seulement si Φ_1 et Φ_2 sont équivalents sur le co-domaine de $\mathcal{T}^2$.

Question 22 (*). Conclure que l'on peut décider de la fonctionnalité d'un TPV en temps polynomial en sa taille.