Graphes infinis : un pont entre théorie des langages et logique

Christophe Morvan

Université Paris-Est
INRIA Rennes Bretagne Atlantique
http://www-igm.univ-mlv.fr/~cmorvan/index.php

Séminaire DIT – Ker Lann
14 Septembre 2010

Plan

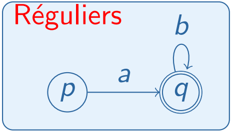
1. Théorie des langages, automates infinis et logique
   - Familles de langages
   - Familles de graphes
   - Quelques éléments de logique

Plan

1. Théorie des langages, automates infinis et logique
   - Familles de langages
   - Familles de graphes
   - Quelques éléments de logique
2. Perspectives et problèmes
   - Langages contextuels déterministes et non déterministes
   - Traces des arbres rationnels
   - Identification de familles pertinentes

Plan

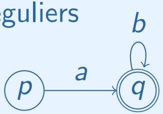
Familles de langages



Familles de langages

Algébriques

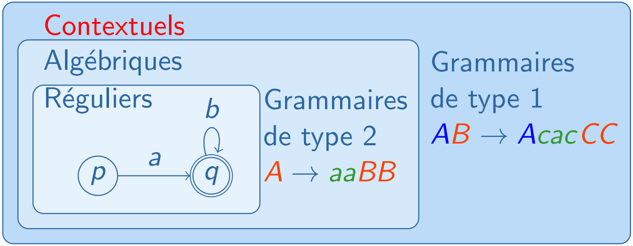
Réguliers



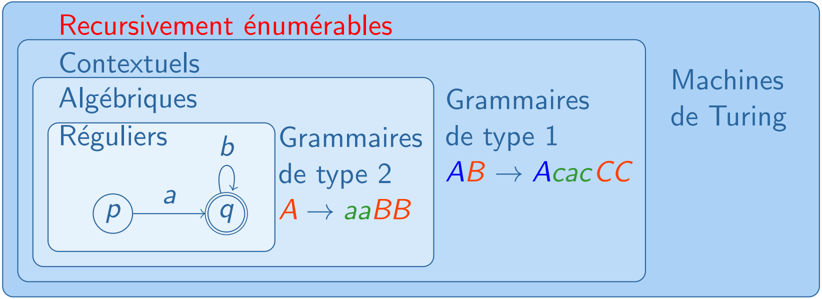
Grammaires de type 2

$A \rightarrow aaBB$

Familles de langages

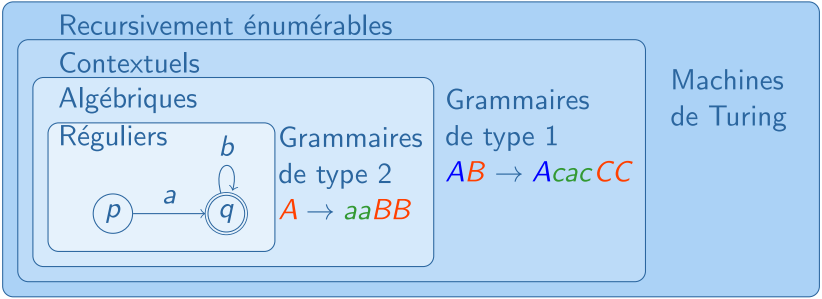


Familles de langages



Familles de langages

Hiérachie de Chomsky – Mesure de l'expressivité



Graphes finis

Observation

La correspondance entre graphes finis et langages est immédiate

Graphes finis

Observation

La correspondance entre graphes finis et langages est immédiate

Les graphes finis $\Leftrightarrow$ Langages rationnels

1985: Automates à pile

D. Müller et P. Schupp : les graphes des transitions des automates à pile

1985: Automates à pile

D. Müller et P. Schupp : les graphes des transitions des automates à pile

Un automate à pile : $\left\{ \begin{array}{lcl} pA & \xrightarrow{a} & pAA \\ pA & \xrightarrow{b} & qA \\ qA & \xrightarrow{c} & q \end{array} \right.$

1985: Automates à pile

D. Müller et P. Schupp : les graphes des transitions des automates à pile

Un automate à pile : $\begin{cases} pA \xrightarrow{a} pAA \\ pA \xrightarrow{b} qA \\ qA \xrightarrow{c} q \end{cases}$

Graphe obtenu:

$$\begin{tikzcd}
 & pA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & pAA \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & pAAA \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "b"] & {} \\
q & qA \arrow[l, "c"'] & qAA \arrow[l, "c"'] & qAAA \arrow[l, "c"'] \arrow[r, dashed, no head] & {}
\end{tikzcd}$$

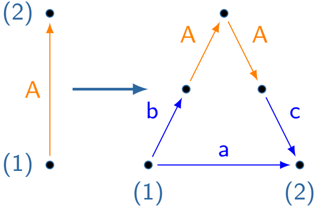
1990 : graphes réguliers

B. Courcelle : les graphes réguliers

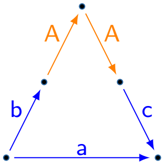
1990 : graphes réguliers

B. Courcelle : les graphes réguliers

Une grammaire déterministe de graphes



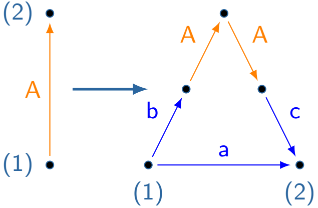
Un axiome



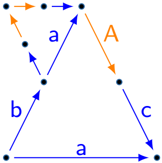
1990 : graphes réguliers

B. Courcelle : les graphes réguliers

Une grammaire déterministe de graphes



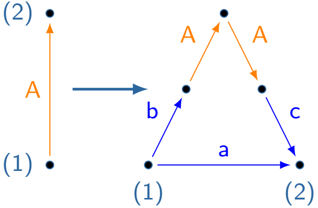
Un graphe



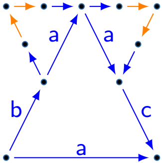
1990 : graphes réguliers

B. Courcelle : les graphes réguliers

Une grammaire déterministe de graphes



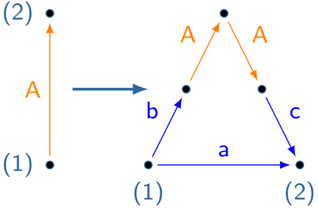
Un graphe



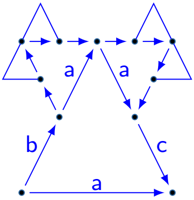
1990 : graphes réguliers

B. Courcelle : les graphes réguliers

Une grammaire déterministe de graphes



Un graphe



1996 : graphes préfixe-reconnaissables

D. Caucal : les graphes préfixe-reconnaissables
Image de l'arbre binaire complet par une substitution rationnelle inverse suivie d'une restriction rationnelle.

1996 : graphes préfixe-reconnaissables

D. Caucal : les graphes préfixe-reconnaissables
Image de l'arbre binaire complet par une substitution rationnelle inverse suivie d'une restriction rationnelle.
Ou encore

$$G = \bigcup_i (U_i \xrightarrow{a_i} V_i) \cdot W_i$$

1996 : graphes préfixe-reconnaissables

D. Caucal : les graphes préfixe-reconnaissables
Image de l'arbre binaire complet par une substitution rationnelle inverse suivie d'une restriction rationnelle.
Ou encore

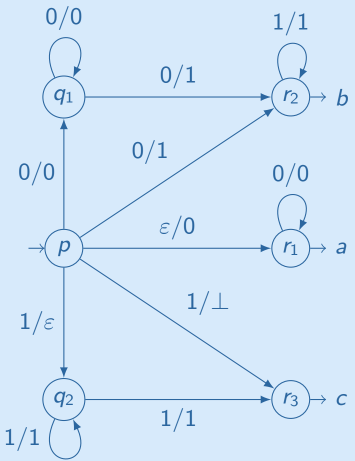
$$G = \bigcup_i (U_i \xrightarrow{a_i} V_i) \cdot W_i$$

On a :

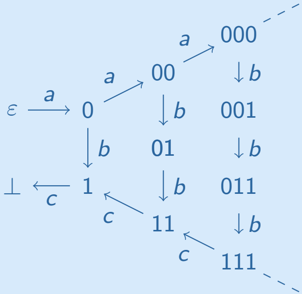
pushdown graphs $\subsetneq$ graphes réguliers $\subsetneq$ graphes préfixe-reconnaissables

2000 : graphes rationnels

Un transducteur rationnel

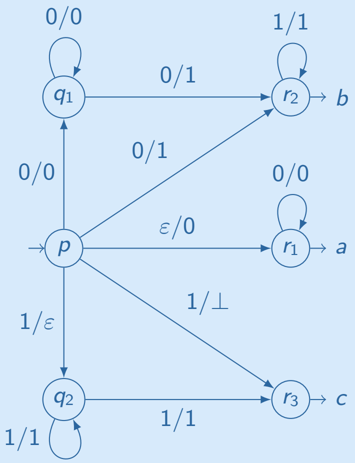


un graphe

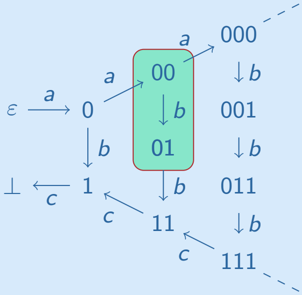


2000 : graphes rationnels

Un transducteur rationnel

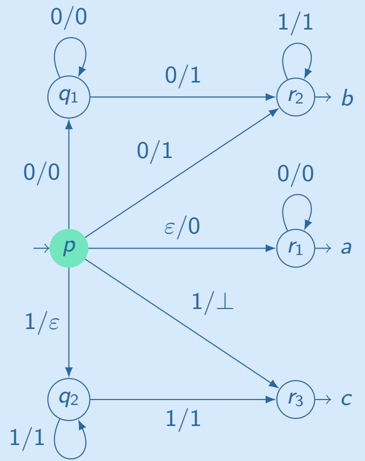


un graphe

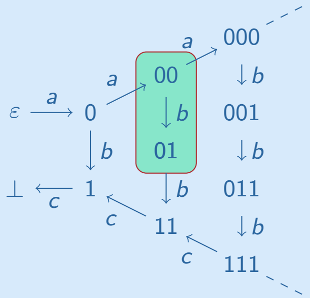


2000 : graphes rationnels

Un transducteur rationnel



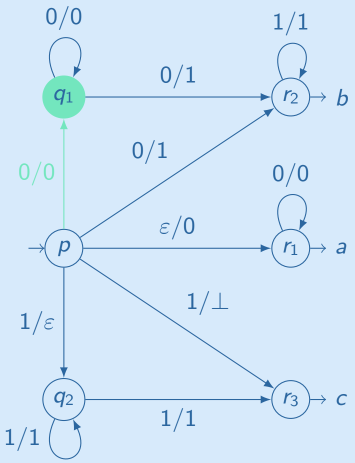
un graphe



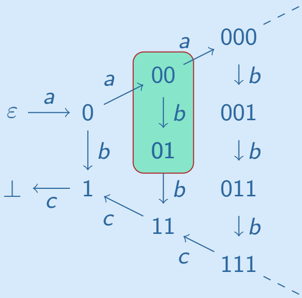
2000 : graphes rationnels

INRIA

Un transducteur rationnel

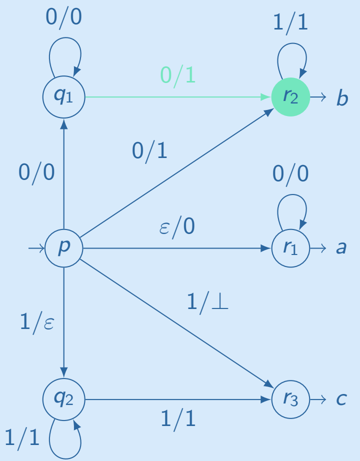


un graphe

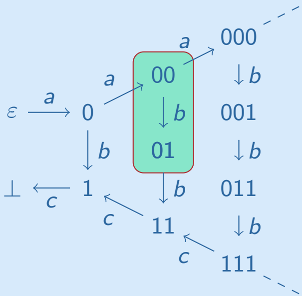


2000 : graphes rationnels

Un transducteur rationnel

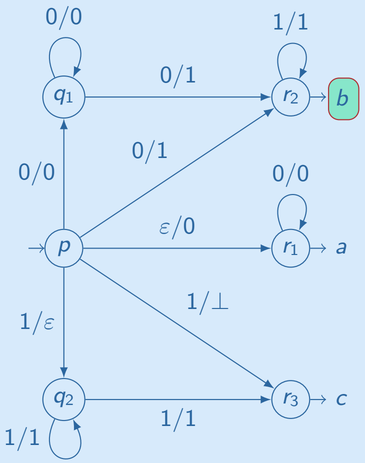


un graphe

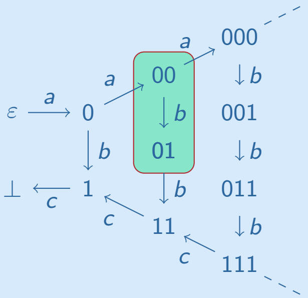


2000 : graphes rationnels

Un transducteur rationnel



un graphe



Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme
  - Théories logiques

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme
  - Théories logiques
- Comparaison de familles

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme
  - Théories logiques
- Comparaison de familles
- Examen de sous-familles

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme
  - Théories logiques
- Comparaison de familles
- Examen de sous-familles
  - Arbres

Questions classiques

- Un graphe donné est-il dans une famille?
- Quels familles de langages peut-on caractériser?
- Examen de questions (in)décidables:
  - Accessibilité
  - Isomorphisme
  - Théories logiques
- Comparaison de familles
- Examen de sous-familles
  - Arbres
  - Graphes déterministes

Logique

Objectif - 1: permettre la formalisation du raisonnement

Logique

Objectif - 1: permettre la formalisation du raisonnement
Objectif - 2: permettre l'automatisation du raisonnement

Logique

Objectif - 1: permettre la formalisation du raisonnement
Objectif - 2: permettre l'automatisation du raisonnement
Précisément:

- Des symboles

Logique

Objectif - 1: permettre la formalisation du raisonnement
Objectif - 2: permettre l'automatisation du raisonnement
Précisément:

- Des symboles
- Un ensemble de formule syntaxiquement correctes

Logique

Objectif - 1: permettre la formalisation du raisonnement
Objectif - 2: permettre l'automatisation du raisonnement
Précisément:

- Des symboles
- Un ensemble de formule syntaxiquement correctes
- Une fonction de vérité (idéalement calculable)

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Quelques exemples

- Logique propositionnelle

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Quelques exemples

- Logique propositionnelle
- Logique du premier ordre

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Quelques exemples

- Logique propositionnelle
- Logique du premier ordre et autres ordres

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Quelques exemples

- Logique propositionnelle
- Logique du premier ordre et autres ordres
- Logiques temporelles

Familles de logique

Chaque famille de logique possède une certaine expressivité

Quelques exemples

- Logique propositionnelle
- Logique du premier ordre et autres ordres
- Logiques temporelles
- Logiques modales

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué

Pour les graphes on a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec Σ_2 ensemble des symboles d'arcs

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué
Pour les graphes on a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec Σ_2 ensemble des symboles d'arcs

- Quantificateurs: $\forall, \exists$

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué
Pour les graphes on a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec Σ_2 ensemble des symboles d'arcs

- Quantificateurs: $\forall, \exists$
- Connecteurs: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, =$

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué
Pour les graphes on a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec Σ_2 ensemble des symboles d'arcs

- Quantificateurs: $\forall, \exists$
- Connecteurs: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, =$
- Négation: $\neg$

Généralités

Définition

Un signature Σ est un alphabet gradué

Pour les graphes on a $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec Σ_2 ensemble des symboles d'arcs

- Quantificateurs: $\forall, \exists$
- Connecteurs: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, =$
- Négation: $\neg$
- Variables: $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$

Quelques formules

INRIA

Premier ordre

La distance

$$\theta_0(x, y) \quad := \quad x = y$$

Quelques formules

Premier ordre

La distance

$$
\begin{aligned}
\theta_0(x, y) &:= x = y \\
\theta_{n+1}(x, y) &:= \theta_n(x, y) \vee \exists z \left(\theta_n(x, z) \wedge \bigvee_{a \in A} (z \xrightarrow{a} y \vee y \xrightarrow{a} z) \right)
\end{aligned}
$$

Quelques formules

Premier ordre

La distance

$$\begin{aligned} \theta_0(x,y) &:= x = y \\ \theta_{n+1}(x,y) &:= \theta_n(x,y) \vee \exists z \left(\theta_n(x,z) \wedge \bigvee_{a\in A}(z \xrightarrow{a} y \vee y \xrightarrow{a} z)\right) \end{aligned}$$

Second ordre monadique

$$x \longrightarrow^* y := \forall S \ ((x \in S \wedge \mathrm{Ferme}(S)) \Rightarrow y \in S)$$

Quelques formules

Premier ordre

La distance

$$\begin{aligned}\theta_0(x,y) &:= x = y\\ \theta_{n+1}(x,y) &:= \theta_n(x,y) \vee \exists z \left(\theta_n(x,z) \wedge \bigvee_{a\in A}(z \xrightarrow{a} y \vee y \xrightarrow{a} z)\right)\end{aligned}$$

Second ordre monadique

$$x \longrightarrow^* y := \forall S\ ((x \in S \wedge \mathrm{Ferme}(S)) \Rightarrow y \in S)$$

avec $\mathrm{Ferme}(S) := \forall x\ \forall y\ ((x \in S \wedge x \longrightarrow y) \Rightarrow y \in S)$

Connexion avec les graphes

Théorème (Caucal 96)

La théorie du second ordre monadique des graphes préfixe-reconnaissables est décidable

Connexion avec les graphes

Théorème (Caucal 96)

La théorie du second ordre monadique des graphes préfixe-reconnaissables est décidable

Théorème (Carayol Morvan 06)

- *La théorie du premier ordre des arbres rationnels est décidable*

Connexion avec les graphes

Théorème (Caucal 96)

La théorie du second ordre monadique des graphes préfixe-reconnaissables est décidable

Théorème (Carayol Morvan 06)

- *La théorie du premier ordre des arbres rationnels est décidable*
- *La théorie du premier ordre avec accessibilité des arbres rationnels est indécidable*

Langages contextuels déterministes

Proposition

Un langage contextuel est reconnu par une machine de Turing linéairement bornée

Langages contextuels déterministes

Proposition

Un langage contextuel est reconnu par une machine de Turing linéairement bornée

Équivalence

De façon équivalente pour reconnaître un mot de longueur n, la machine utilise au plus une bande de longueur n

Langages contextuels déterministes

Proposition

Un langage contextuel est reconnu par une machine de Turing linéairement bornée

Équivalence

De façon équivalente pour reconnaître un mot de longueur n, la machine utilise au plus une bande de longueur n

Conjecture (Kuroda 64)

Les langages reconnu par les machines linéairement bornées déterministes et non déterministes sont les mêmes.

Pistes

Théorème (Immermann/Szelepcsenyi 88)

Les langages contextuels sont clos par complémentation

Pistes

Théorème (Immermann/Szelepcsenyi 88)

Les langages contextuels sont clos par complémentation

Théorème (Morvan Stirling 01)

Les traces des graphes rationnels sont exactement les langages contextuels

Pistes

Théorème (Immermann/Szelepcsenyi 88)

Les langages contextuels sont clos par complémentation

Théorème (Morvan Stirling 01)

Les traces des graphes rationnels sont exactement les langages contextuels

Problèmes

- Le graphe rationnel définit dans le théorème précédent est fortement non déterministe

Pistes

Théorème (Immermann/Szelepcsenyi 88)

Les langages contextuels sont clos par complémentation

Théorème (Morvan Stirling 01)

Les traces des graphes rationnels sont exactement les langages contextuels

Problèmes

- Le graphe rationnel définit dans le théorème précédent est fortement non déterministe
- On ne sait pas déterminiser les graphes rationnels

Pistes

Théorème (Immermann/Szelepcsenyi 88)

Les langages contextuels sont clos par complémentation

Théorème (Morvan Stirling 01)

Les traces des graphes rationnels sont exactement les langages contextuels

Problèmes

- Le graphe rationnel définit dans le théorème précédent est fortement non déterministe
- On ne sait pas déterminiser les graphes rationnels
- On peut construire un graphe localement déterministe mais avec un ensemble rationnel de sommets de départs

Arbres rationnels

Définition (Arbre)

- au plus un ancêtre par sommet — décidable

Arbres rationnels

Définition (Arbre)

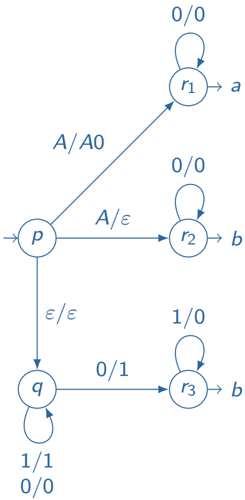
- au plus un ancêtre par sommet — décidable
- une unique racine — décidable

Arbres rationnels

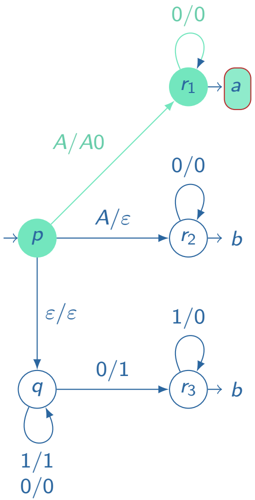
Définition (Arbre)

- au plus un ancêtre par sommet — décidable
- une unique racine — décidable
- connexe — indécidable

Exemple simple - 2^n-arbre

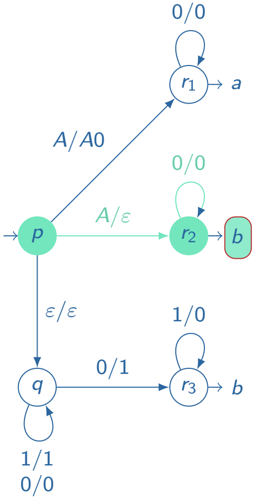


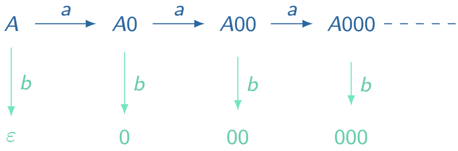
Exemple simple - 2^n-arbre



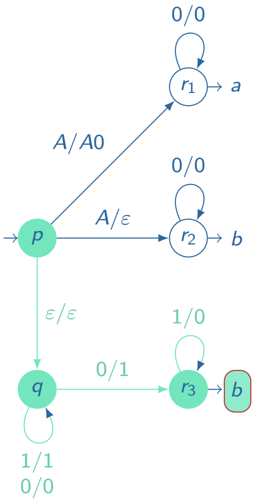
$A \xrightarrow{a} A0 \xrightarrow{a} A00 \xrightarrow{a} A000$ - - - - -

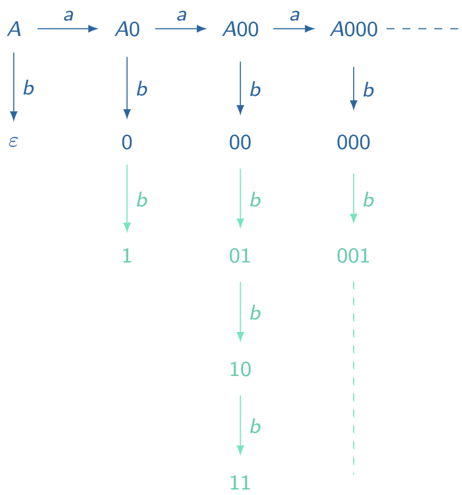
Exemple simple - 2^n-arbre





Exemple simple - 2^n-arbre





Propriétés des arbres rationnels

Proposition

Pour les arbres rationnels

- *l'inclusion et l'égalité est décidable*

Propriétés des arbres rationnels

Proposition

Pour les arbres rationnels

- *l'inclusion et l'égalité est décidable*
- *l'accessibilité (entre deux sommets) est décidable*

Propriétés des arbres rationnels

Proposition

Pour les arbres rationnels

- *l'inclusion et l'égalité est décidable*
- *l'accessibilité (entre deux sommets) est décidable*
- *ensemble effectif de feuilles*

Propriétés des arbres rationnels

Proposition

Pour les arbres rationnels

- *l'inclusion et l'égalité est décidable*
- *l'accessibilité (entre deux sommets) est décidable*
- *ensemble effectif de feuilles*
- *on peut trouver des sous-arbres non-rationnels*

Les traces des arbres

Définition

La trace d'un arbre est l'ensemble des étiquettes des chemins entre la racine et les feuilles

Les traces des arbres

Définition

La trace d'un arbre est l'ensemble des étiquettes des chemins entre la racine et les feuilles

Conjecture

On peut trouver des langages algébriques qui ne sont la trace d'aucun arbre rationnel

Les traces des arbres

Définition

La trace d'un arbre est l'ensemble des étiquettes des chemins entre la racine et les feuilles

Conjecture

On peut trouver des langages algébriques qui ne sont la trace d'aucun arbre rationnel

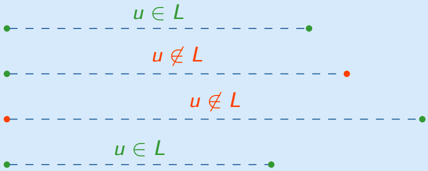
Exemple

L'ensemble des mots ayant autant de a que de b est un bon candidat

Curiosité

Exemple

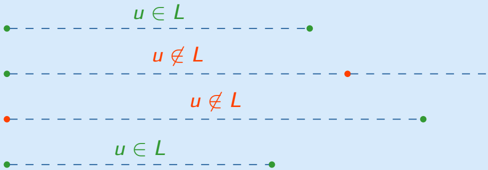
Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)



Curiosité

Exemple

Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)



Curiosité

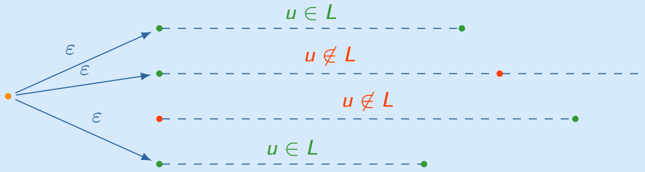
Exemple

Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)

Curiosité

Exemple

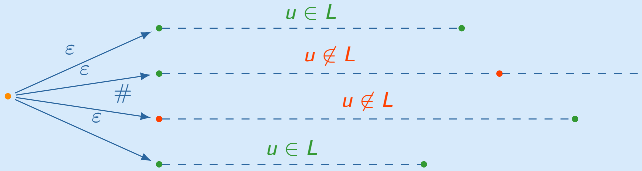
Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)



Curiosité

Exemple

Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)



Curiosité

Exemple

Étant donné un langage contextuel quelconque L, on peut construire le graphe rationnel suivant (les sommets vert et rouges sont des ensembles rationnels)

Proposition

Quel que soit le langage contextuel L (sur l'alphabet X), il existe un arbre rationnel T étiqueté sur $X \cup \{\#\}$ tel que $Tr(T) \cap X^* = L$

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes
  - Arbres - Dag

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes
  - Arbres - Dag
- Restriction internes

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes
  - Arbres - Dag
- Restriction internes
  - Transducteurs automatiques

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes
  - Arbres - Dag
- Restriction internes
  - Transducteurs automatiques
  - Transducteurs séquentiels

Constat

Remarque

Le fossé entre le graphes préfixe-reconnaissables et les graphes rationnels est considérable

Problème

Identifier des familles intermédiaires pertinentes

Exemple

- Restriction structurelles
  - Graphes déterministes
  - Arbres - Dag
- Restriction internes
  - Transducteurs automatiques
  - Transducteurs séquentiels
  - Transducteurs monotones

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Conclusion

INRIA

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Perspectives

- Examiner plus finement le double lien avec la théorie des langages

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Perspectives

- Examiner plus finement le double lien avec la théorie des langages
- Étendre les résultats actuel

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Perspectives

- Examiner plus finement le double lien avec la théorie des langages
- Étendre les résultats actuel
- Ajouter d'autres éléments au modèle:

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Perspectives

- Examiner plus finement le double lien avec la théorie des langages
- Étendre les résultats actuel
- Ajouter d'autres éléments au modèle:
    - temps

Conclusion

Les graphes infinis

- Thématique récente
- Thématique active
- Sujet très formel
- Multiples sujets d'application

Perspectives

- Examiner plus finement le double lien avec la théorie des langages
- Étendre les résultats actuel
- Ajouter d'autres éléments au modèle:
  - temps
  - probabilités

Intéressés ?

Venez nous voir à l'Irisa !

- Distribcom
- S4
- Vertecs

http://www-igm.univ-mlv.fr/~cmorvan/index.php