



Les milieux granulaires :
un exemple de système complexe



Renaud Delannay

Institut de Physique de Rennes
UMR CNRS 6251

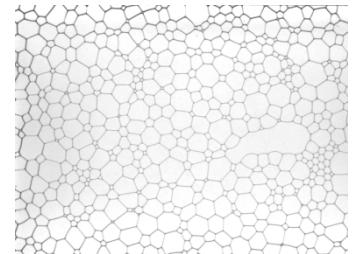
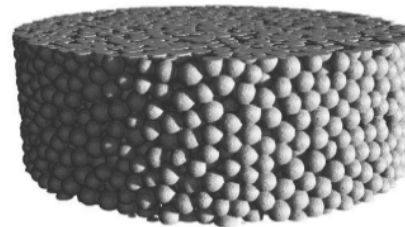
UNIVERSITÉ DE  **RENNES 1**

Parcours

- Maths (ENS Cachan, agreg.)
- Mécanique des fluides (DEA, thèse, MdC Ecole des Mines Nancy)
- Physique (Rennes)
- Recherche :

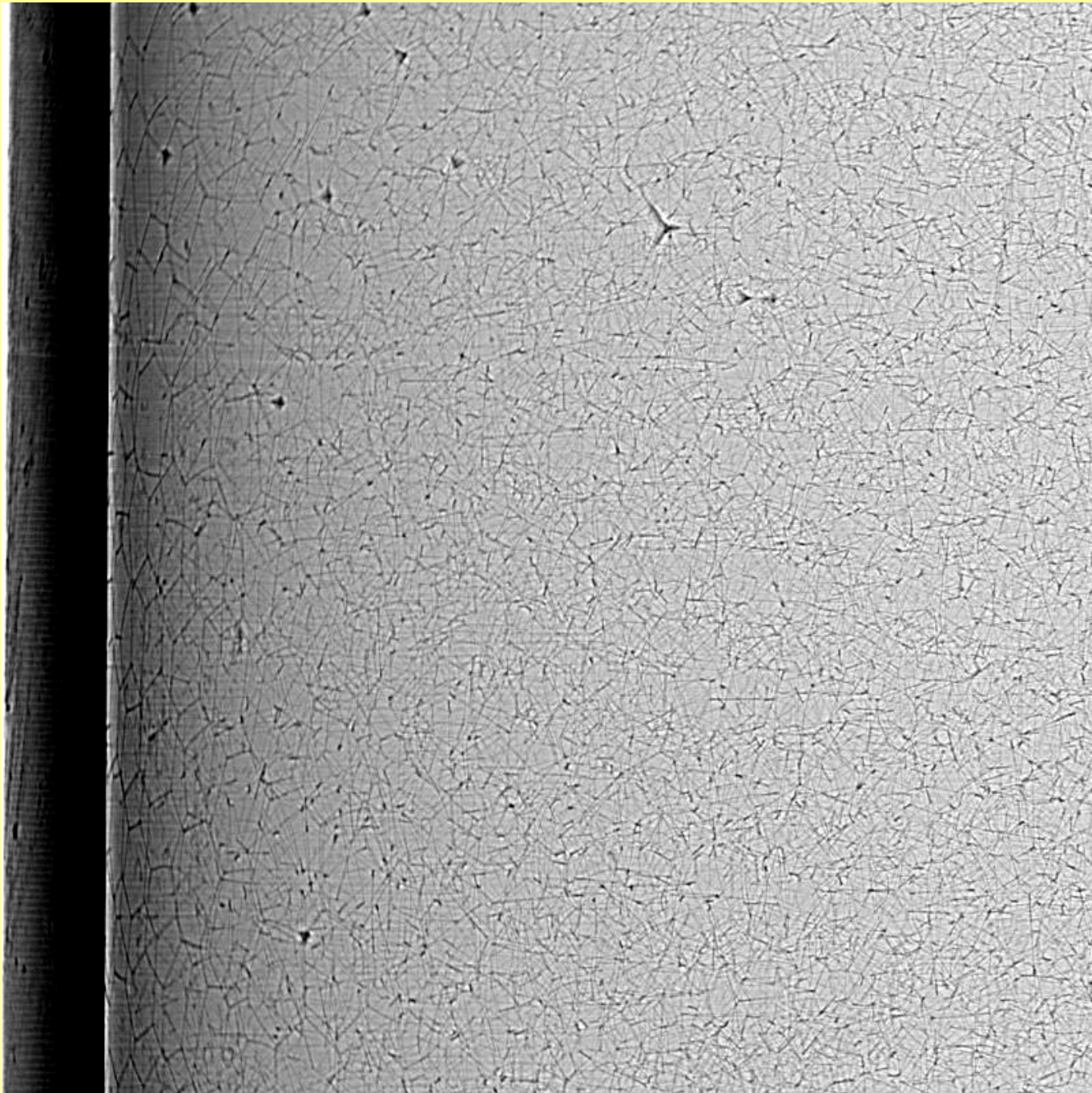
Milieus
divisés

- Dispersion de Taylor dans un milieu poreux traversé par un fluide
- Mousses liquides et structures cellulaires
- Milieux granulaires

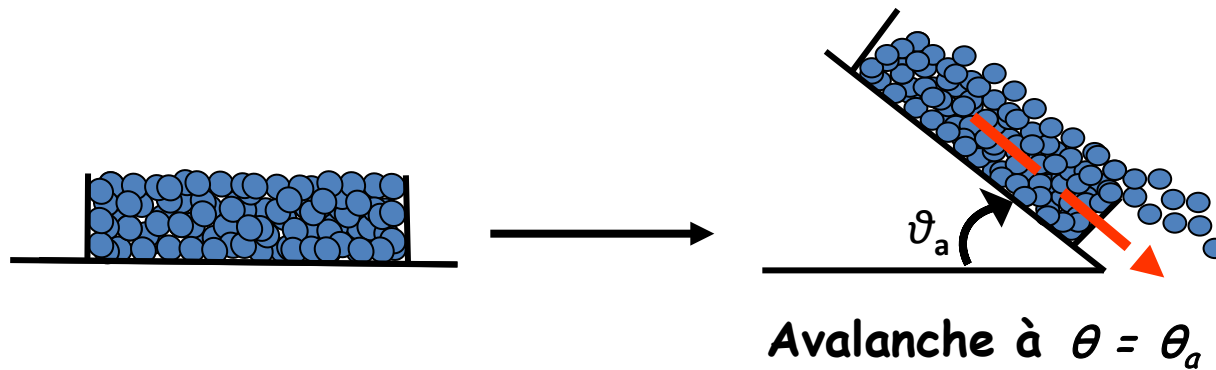


+ Matrices aléatoires, foyers préhistoriques

Film

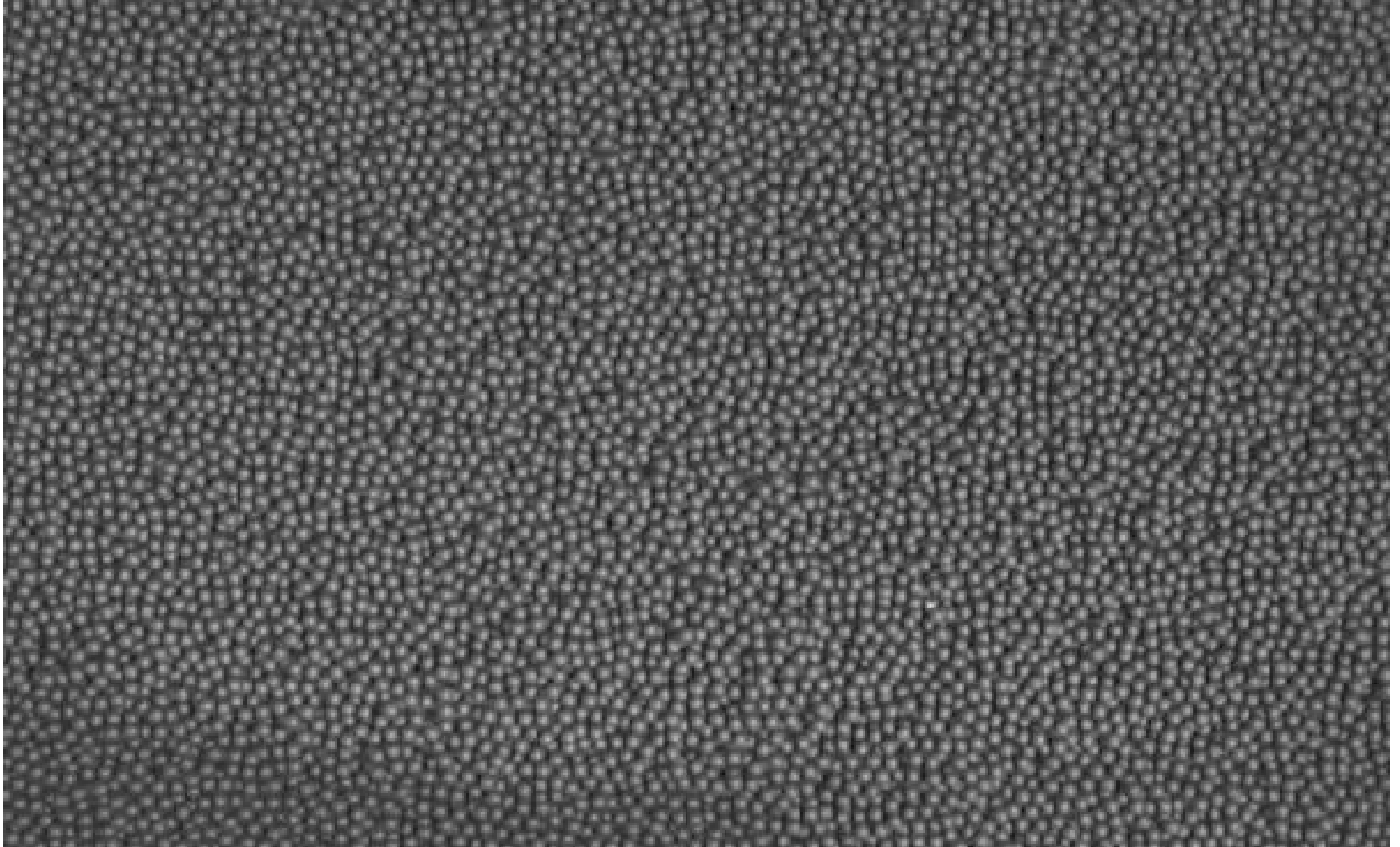


Exemple : tas inclinés : dynamique avant l'avalanche



- Quelle est l'activité de l'empilement au cours de l'inclinaison ?
- Comment le tas s'adapte t-il à l'inclinaison ?
- Quels sont les mécanismes physiques à l'origine de la relaxation du système ?

Dynamique à la surface du tas



Qu'est qu'un milieu granulaire

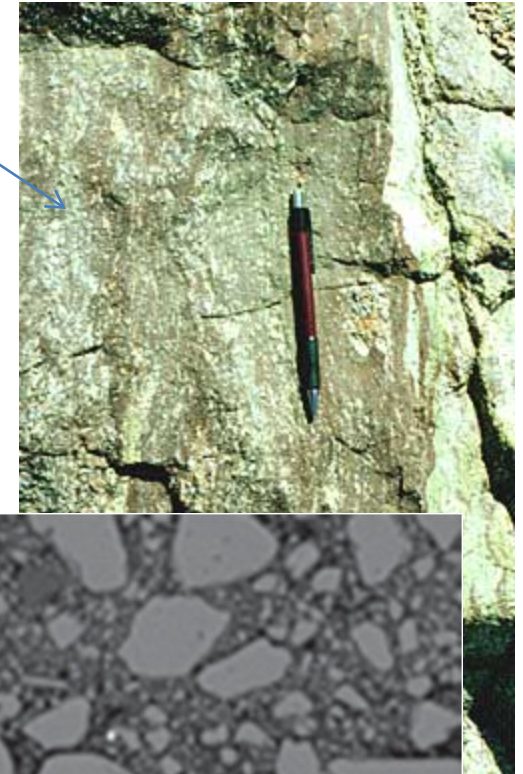
- Collection de particules solides (nombre de particules $1 \ll N \ll N_b$ Avogadro).
- Interaction dissipative pendant le contact : frottement solide, collisions inélastiques.
- Système athermique : $k_B T \ll E_{\text{typique}} \approx mgd$
(rapport 10^{-12} pour $d = 1\text{mm}$)
- Granulaire sec :
 - effets capillaires,
 - fluide environnant
 - interactions électrostatiques
 - Van der Waals

Effet négligeable devant celui de la gravité
- Systèmes macroscopique présentant des effets collectifs mais échappe champ de la physique statistique « normale »

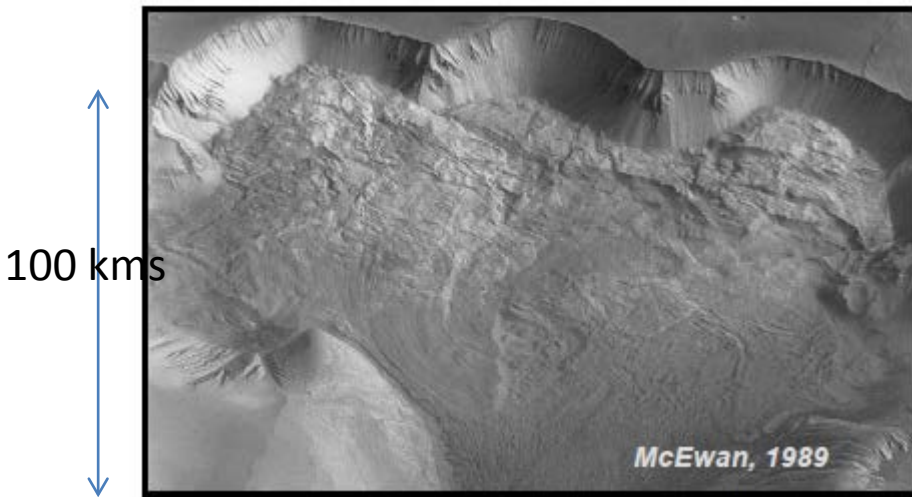
Exemples de milieux granulaires

- Gouge de faille

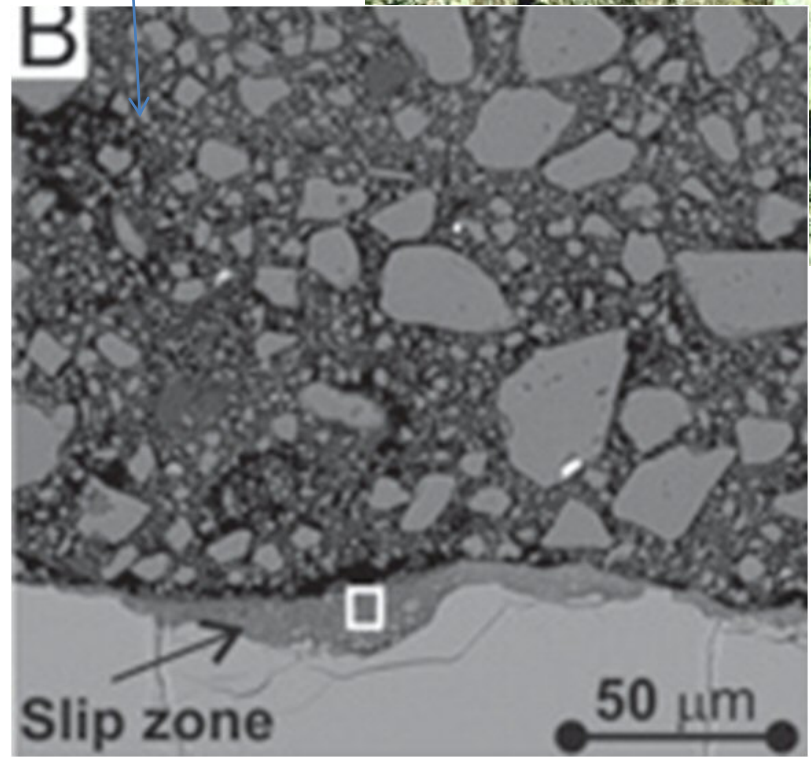
Les failles géologiques sont souvent remplies avec des roches broyées appelées gouge.



- Avalanches et glissements de terrain



Glissement de terrain sur Mars



- Aliments et grains naturels



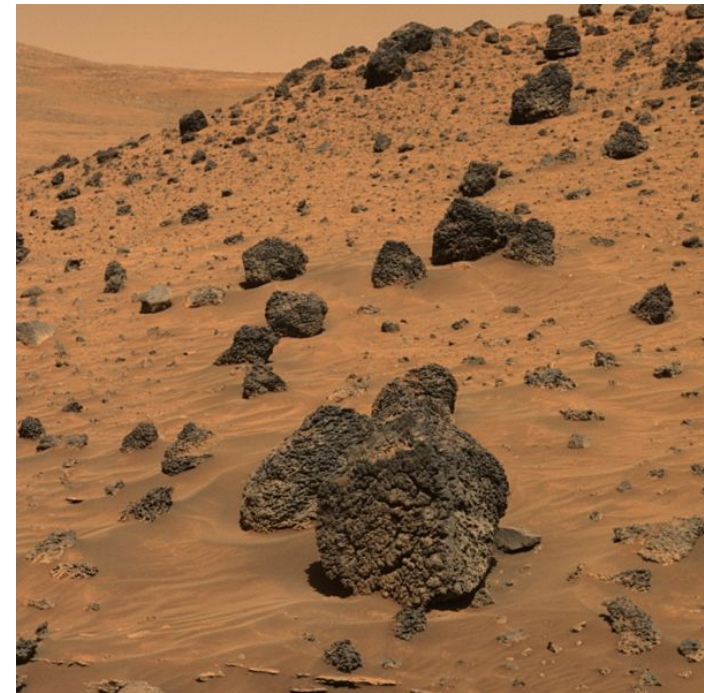
- Poudres pharmaceutiques



- Matériaux industriels



- Sables et sols



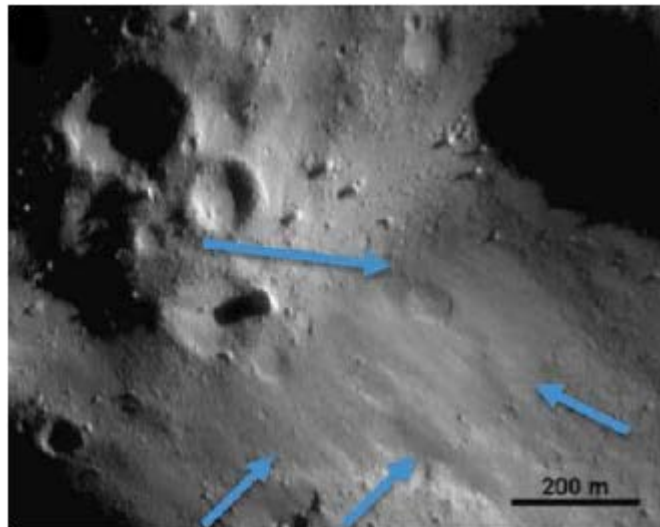
- Ici ...



Nature, 387 (1997)

- Comme ailleurs

Migration de
régolithes sur
Eros



Astéroïde



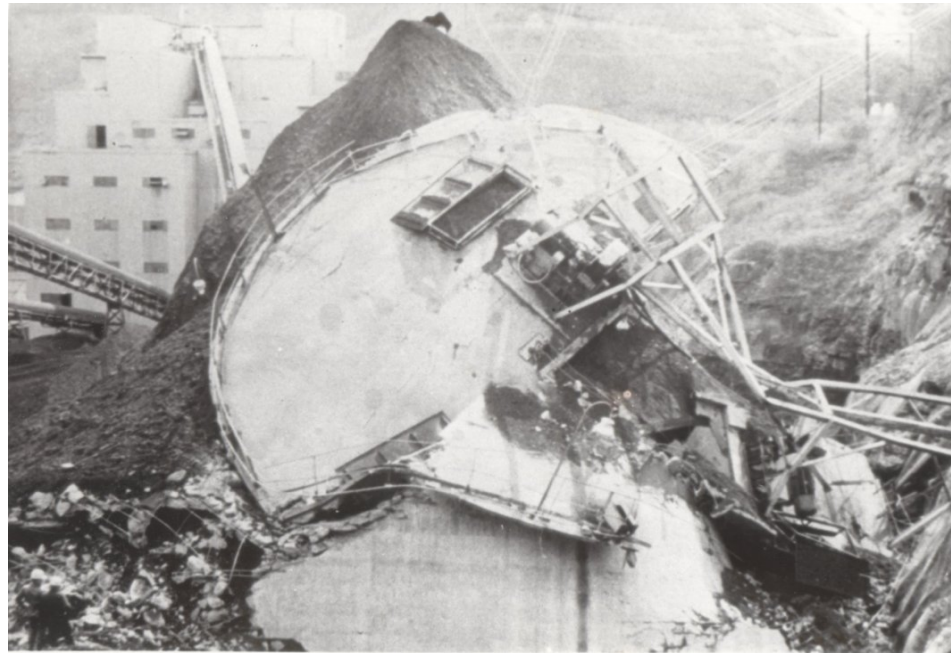
Enjeux économiques

- 2^{ème} rang après l'eau dans l'activité humaine
 - Exemples : - Béton (ciment+sable+gravier) : $15 \cdot 10^9$ tonnes/an
 - Charbon : $6 \cdot 10^9$ tonnes/an
- Leur traitement utilise plus de 10% de l'énergie mondiale :
 - USA : coûts de manipulation $> 10^9$ dollars /an
- Techniques et opérations variées : broyage, tri, mélange, transport,...
 - Nombreux accidents, installations fonctionnent généralement aux 2/3 de leur capacité (pas optimisé).
- Problèmes : blocages, ségrégation (mélanges non reproductibles)

Et géophysiques...

- Matériaux naturels omniprésents
 - Exemple : sable : (10% de la surface des terres émergées) + sous sol + marges océaniques...
- Constituant mais aussi facteur d'évolution :
 - Stratification des roches, sables, sédiments
 - Ensablement, déplacement des cours d'eau
 - Érosion (avalanches, entraînement par les eaux et le vent)
 - Formation et déplacement des dunes
- Facteurs de risques naturels (Avalanches, séismes, glissements de terrain) provoquent d'importants dégâts
- Difficultés à garantir la stabilité des sols

Quelques problèmes techniques...

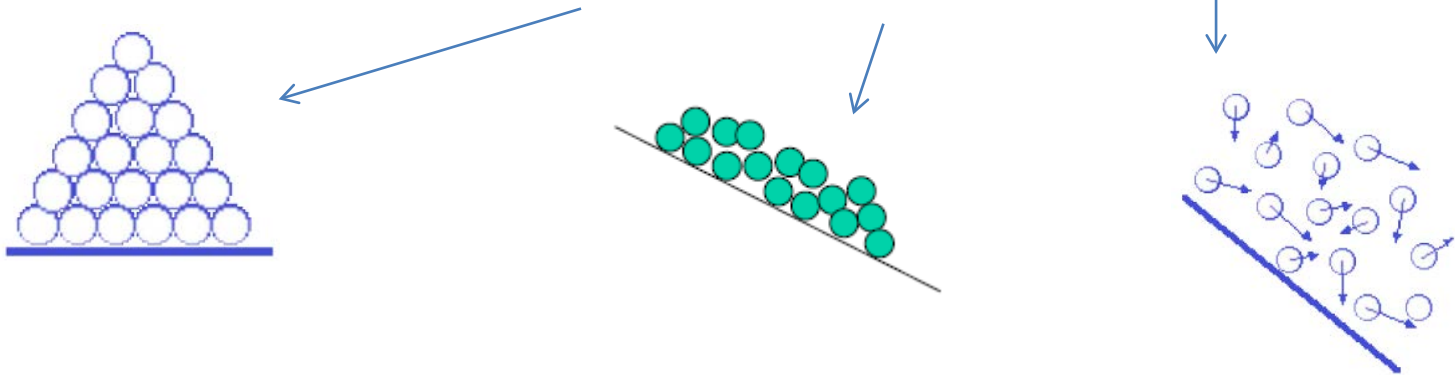


effondrement d'un élévateur à grains
Photo—Andy Jenike



Quelques questions

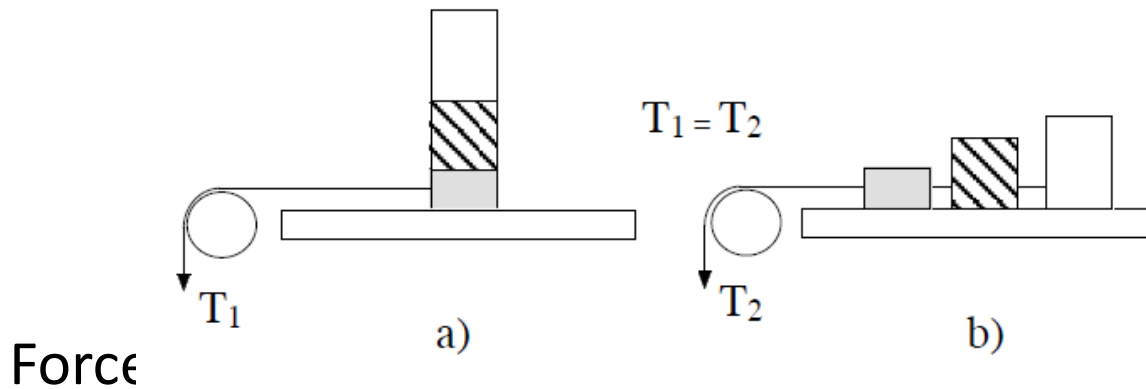
- Blocages/déstabilisation (jamming/unjamming)
- Ségrégation/mélange
- Régimes d'écoulement (en fonction matériaux, énergie, C.L., ...)
- Instabilités et émergence de structures (rides, dunes,...)
- Transitions de phases (« solide », « liquide », « gaz »)



- Mécanique statistique granulaire?
- Limite continue—Loi de comportement?

Interactions entre grains : friction

- Lois d'Amont-Coulomb



Expérience de
Léonard de Vinci

- indépendante de la surface de contact
- proportionnelle à la force normale (ici poids)
- une fois en mouvement

$$T_s = \mu_s N$$

$$T_d = \mu_d N, \quad 0 < \mu_d < \mu_s < 1$$

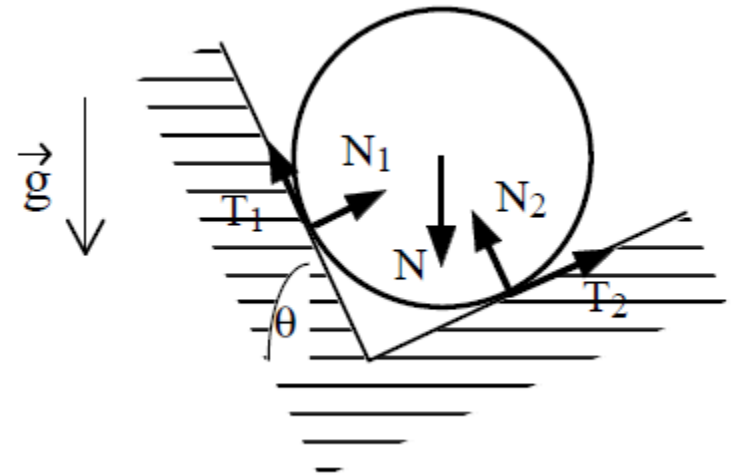
Approximations (vieillessement, effet de la vitesse de glissement,...)

indétermination

- Les relations d'équilibre ne suffisent pas à calculer les forces de friction

3 relations,
4 inconnues

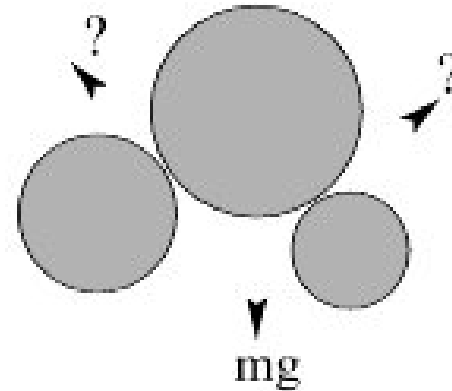
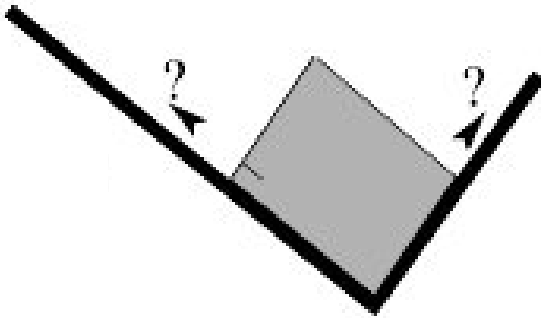
$$\left\{ \begin{array}{l} N \cos \theta = N_1 + T_2, \\ N \sin \theta = N_2 + T_1, \\ R(T_2 - T_1) = 0. \end{array} \right.$$



- Contacts non glissants :

$$|T_i| < \mu N_i, i \in \{1,2\}$$

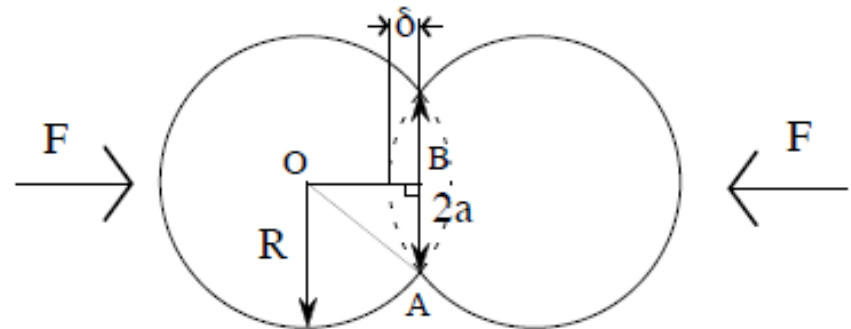
- Indétermination (connaître l'histoire du système est nécessaire)



- Sphères déformables : forces de Hertz

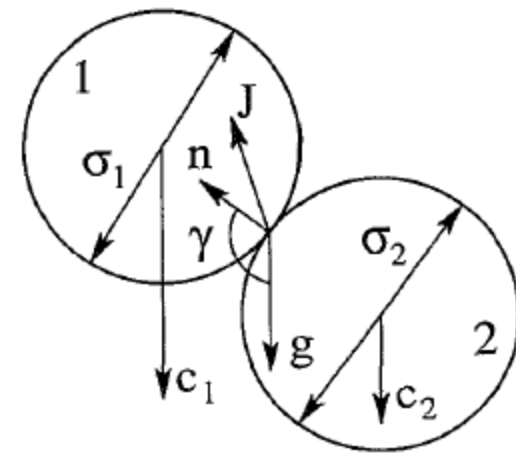
$$F = k\delta^{3/2}, \text{ si } \delta > 0$$

$$k = \frac{\sqrt{2RE}}{3(1-\nu^2)}$$



- Exemple : verre, $R = 2\text{mm}$, $k = 1,4 \cdot 10^9 \text{ kgm}^{1/2}\text{s}^{-2}$. Ecrasement très faible (micron)

Collisions binaires



- Collision binaire en projection sur le plan de collision, les vitesses c_1 et c_2 sont celles avant l'impact,
- n : normale au point d'impact, σ_1 et σ_2 : rayons des billes
- J : percussion (variation de quantité de mouvement au cours du choc)

- g : vitesse relative au point d'impact :
$$\mathbf{g} = (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) - \left(\frac{\sigma_1}{2} \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{\sigma_2}{2} \boldsymbol{\omega}_2 \right) \times \mathbf{n}$$

$$\text{P.F.D} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1(\mathbf{c}'_1 - \mathbf{c}_1) = -m_2(\mathbf{c}'_2 - \mathbf{c}_2) = \mathbf{J} \\ (2I_1/\sigma_1)(\boldsymbol{\omega}'_1 - \boldsymbol{\omega}_1) = (2I_2/\sigma_2)(\boldsymbol{\omega}'_2 - \boldsymbol{\omega}_2) = -\mathbf{n} \times \mathbf{J} \end{array} \right.$$

Le calcul des vitesses après impact se réduit donc à celui de la percussion (3 coordonnées).

Force de contact

La percussion correspond à la force totale exercée pendant le choc. On la caractérise à partir de 3 paramètres :

- le coefficient de frottement : μ

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{J}| = \mu (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})$$

Traduit une dissipation par glissement+frottement.

L'énergie est également dissipée par déformation plastique, ondes élastiques rayonnées, vibrations etc. On traduit le tout par :

- le coefficient de restitution normal : e

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}' = -e \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$$

Traduit la fraction d'énergie stockée dans la déformation élastique rendue à la composante normale de la vitesse.

- le coefficient de restitution tangentiel : β_0

$$\mathbf{n} \times \mathbf{g}' = -\beta_0 \mathbf{n} \times \mathbf{g}$$

Expériences numériques : éléments discrets

- Pourquoi :
 - Difficultés expérimentales pour mesurer certaines quantités à l'intérieur de l'écoulement (ex. : contraintes internes)
 - Permet de valider certaines hypothèses (on sait ce qu'on injecte comme ingrédients physiques), et d'être à peu près sûr du résultat obtenu (écoulement établi en conditions périodiques,...)
 - Permet de réaliser certaines « expériences » difficiles à installer au laboratoire
- Méthode (résolution à l'échelle du grain) :
 - Paramétrer les grains
 - Définir/calculer les forces de contact entre grains, et entre un grain et les frontières du système.
 - Ecrire les équations du mouvement
 - Résoudre numériquement les équations du mouvement

- L'étape de paramétrisation est simple pour des sphères : position centre (\mathbf{x}_i), rayon (R_i), orientation (\mathbf{o}_i), vitesse centre (\mathbf{v}_i), vitesse rotation ($\boldsymbol{\omega}_i$)
- La définition des forces de contact est la partie la plus délicate et la plus longue, elle nécessite de déterminer d'abord avec quels objets un grain donné va interagir, puis de calculer toutes les forces d'interaction.
- Particules « molles » en interactions élastiques , plusieurs choix sont possibles , exemple :

Force normale :

$$F_{i,j}^n = \underbrace{k_n \delta_{ij}}_{\text{Partie élastique}} \mathbf{n}_{ij} - \underbrace{\gamma_n \bar{m} \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}}_{\text{Amortissement (dissip.)}}$$

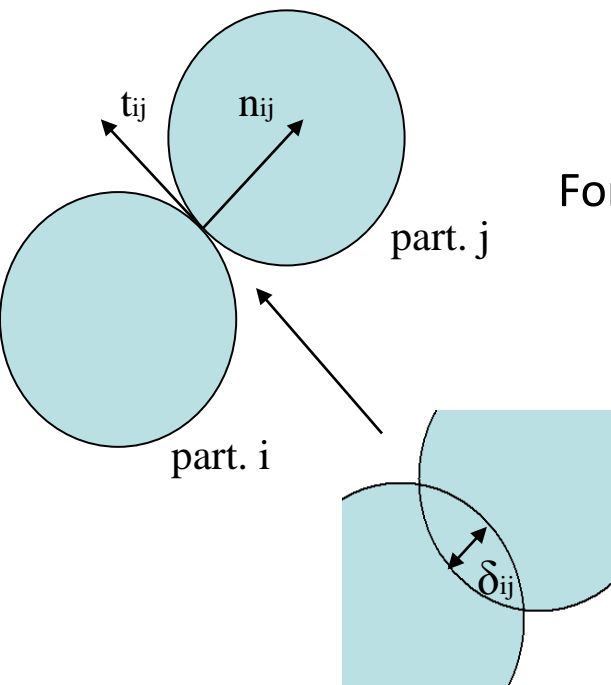
Partie élastique Amortissement (dissip.)

Force tangentielle :

$$\mathbf{F}_{ij}^t = -\text{sign}(\xi) \min(\mu_s |\mathbf{F}_{ij}^n| - k_t \xi) \frac{\mathbf{g}_{ij}}{\|\mathbf{g}_{ij}\|}$$

$$\xi = \int_{t_0}^t \|\mathbf{g}_{ij}\| ds$$

On peut y ajouter de l'amortissement (terme en $\gamma_t \mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{g}_{ij}$)



Ecoulements granulaires dilués, théorie cinétique

Gaz de molécules :

Collisions rapides,
distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann

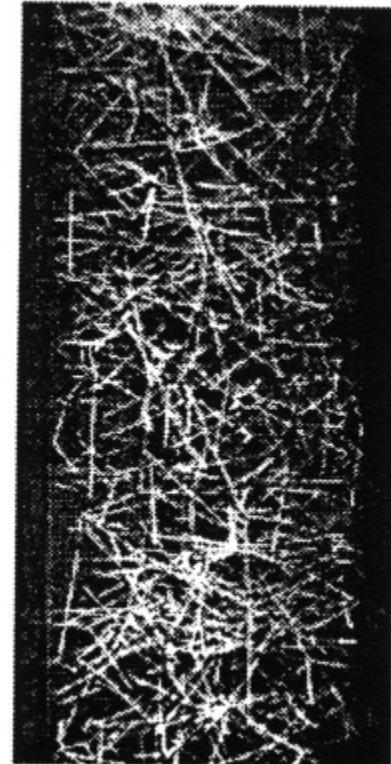
$$P(v) \sim \exp[-(m/2)v^2/(k_B T)]$$

$$\langle v^2 \rangle \sim k_B T \quad \text{largeur de la distribution}$$

Gaz granulaires:

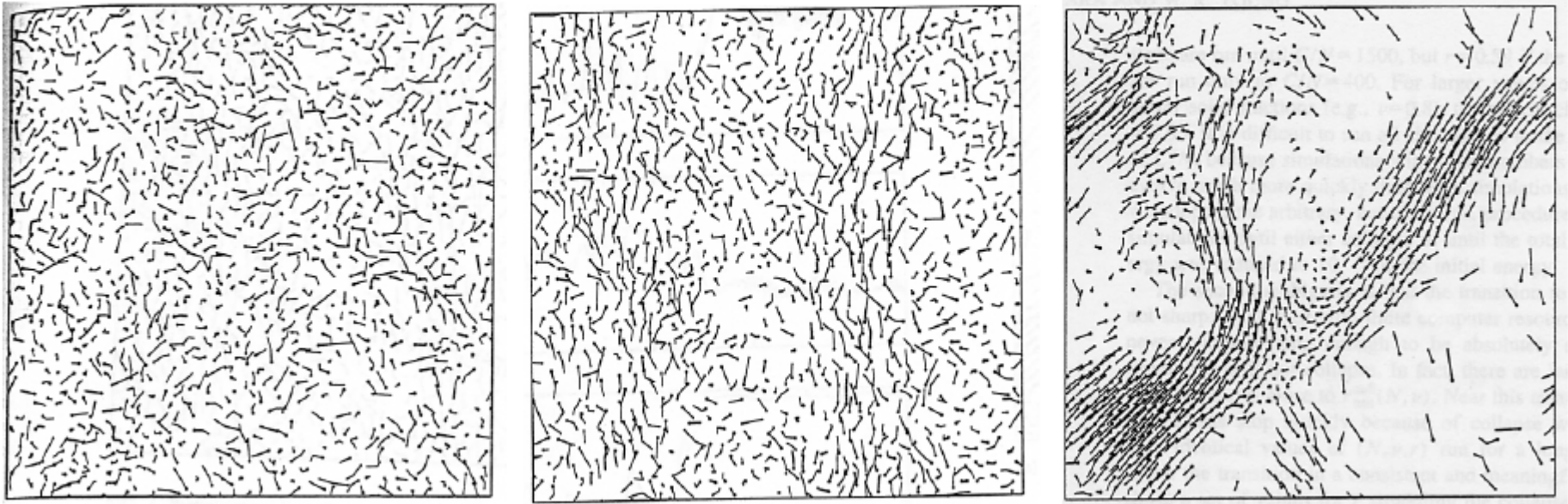
Ici aussi, collisions rapides, binaires, distribution
de vitesses de type Maxwell-Boltzmann

$$\langle v^2 \rangle \sim T_g$$



- On s'attend à ce que les gaz granulaires s'écoulent comme des gaz de molécules avec une dissipation supplémentaire (chocs non-élastiques).
- Marche plutôt bien pour décrire des systèmes dans lesquels de l'énergie est injectée en permanence.
- Des phénomènes intéressants sont induits par la dissipation : effondrement inélastique , corrélations de vitesses, non-équipartition.

Effondrement inélastique

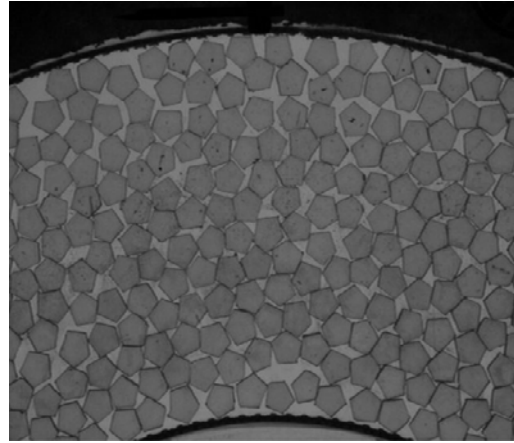
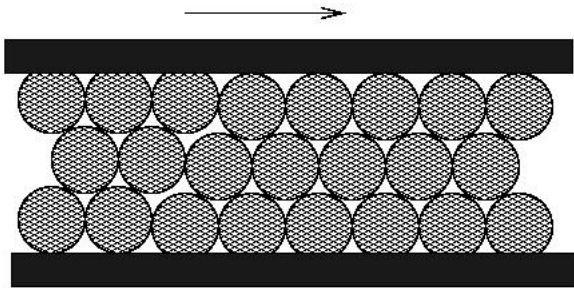


Refroidissement d'un gaz granulaire a) $e = 0,99$ b) $e = 0,97$ c) $e = 0,72$ (S. McNamara, 1996)

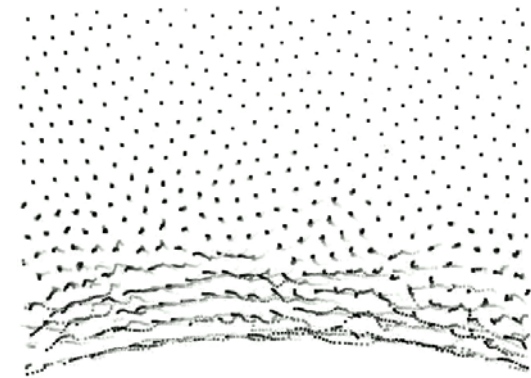
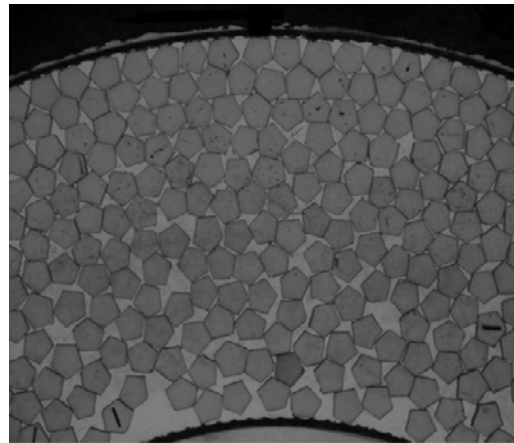
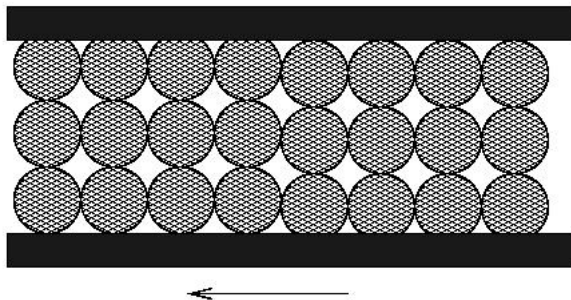
Ecoulements granulaires denses

- Collisions non binaires, contacts persistants
- Localisation : dilatance de Reynolds, bandes de cisaillement

Reynolds Dilatancy



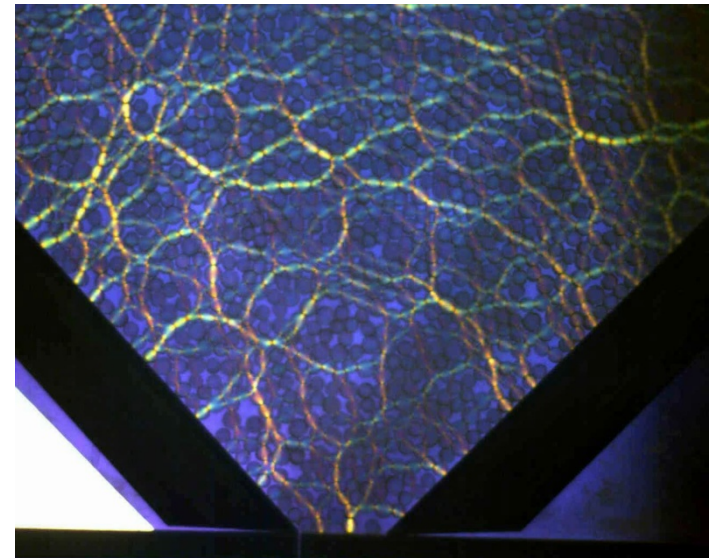
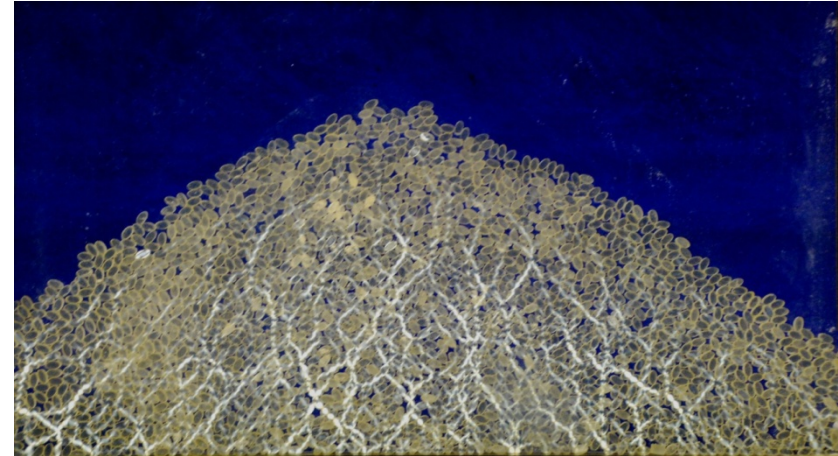
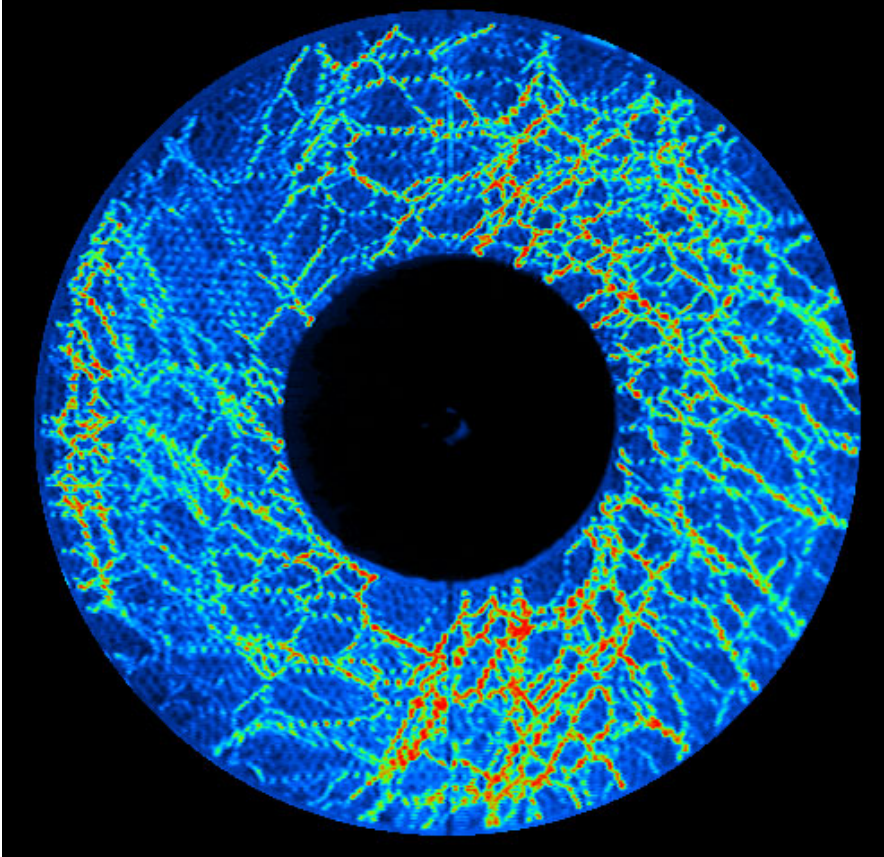
Dilatation after shearing



Expérience de cisaillement : avant et après

Ecoulements granulaires denses

- Chaînes de forces (souvent anisotropes)



⇒ fortes fluctuations spatio-temporelles

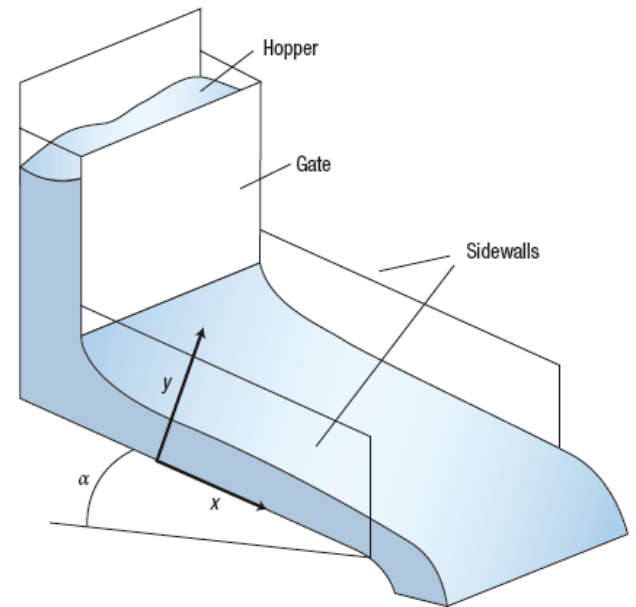
- Comportements collectifs complexes

Ecoulements sur plan incliné

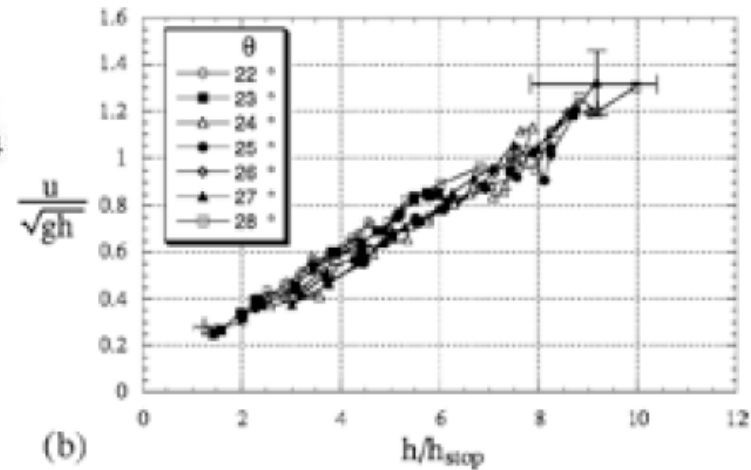
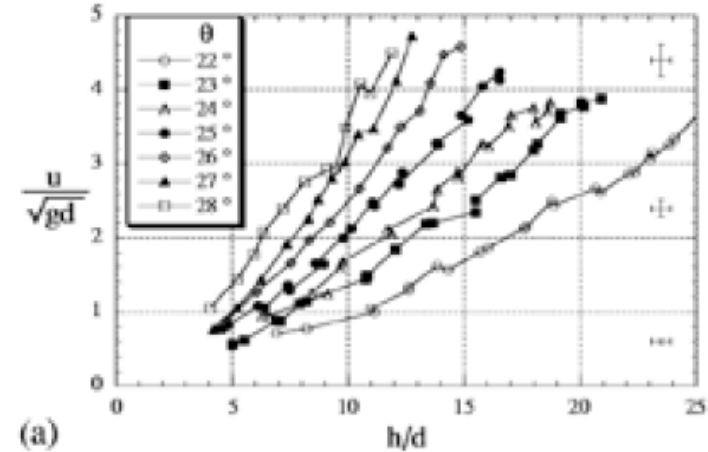
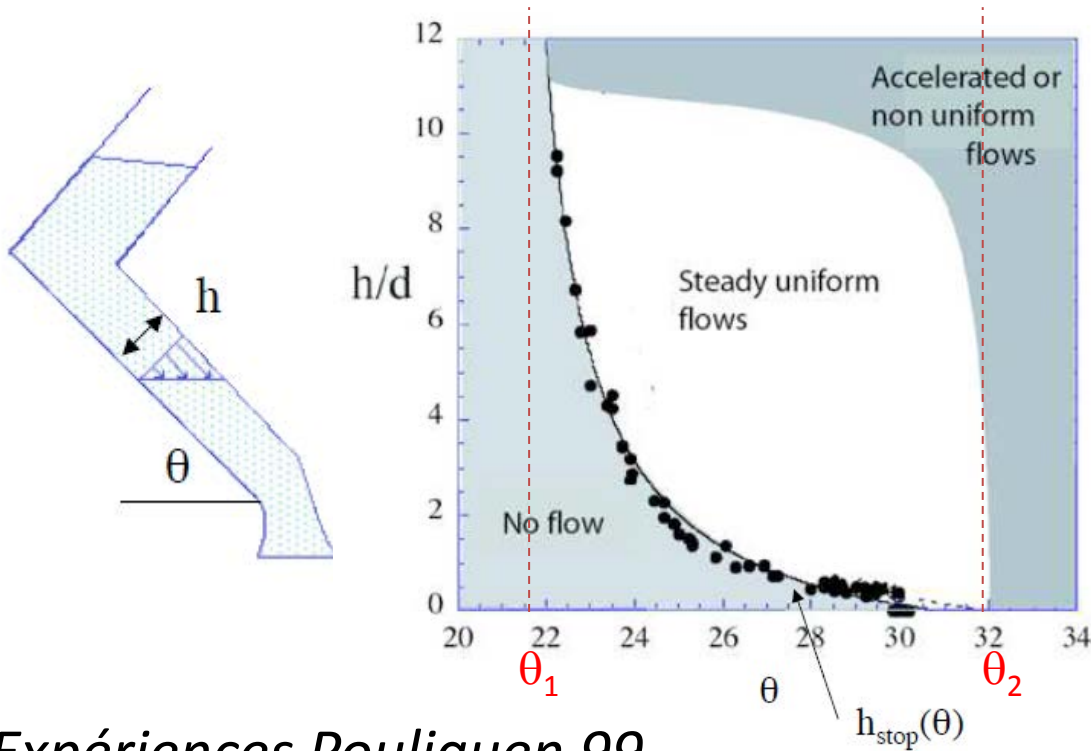
- Restent suffisamment simples pour une analyse détaillée
- Mais préservent complexité et importance pratique
- Coexistence de phases (solides, liquides, gaz)

Paramètres :

- ✓ Grains : distributions de forme et taille, matériaux $\rightarrow (e, \mu, \beta)$
- ✓ Parois : caractérisation géométrique (lisse, rugosité, grains collés?), matériaux \rightarrow interaction avec grain $(e_{gw}, \mu_{gw}, \beta_{gw})$.
- ✓ Conditions aux limites (débit d'entrée Q , distribution de vitesses, d'énergie potentielle)
- ✓ Angle d'inclinaison θ , distance entre parois latérales W , longueur L



Écoulement sur plan « rugueux »



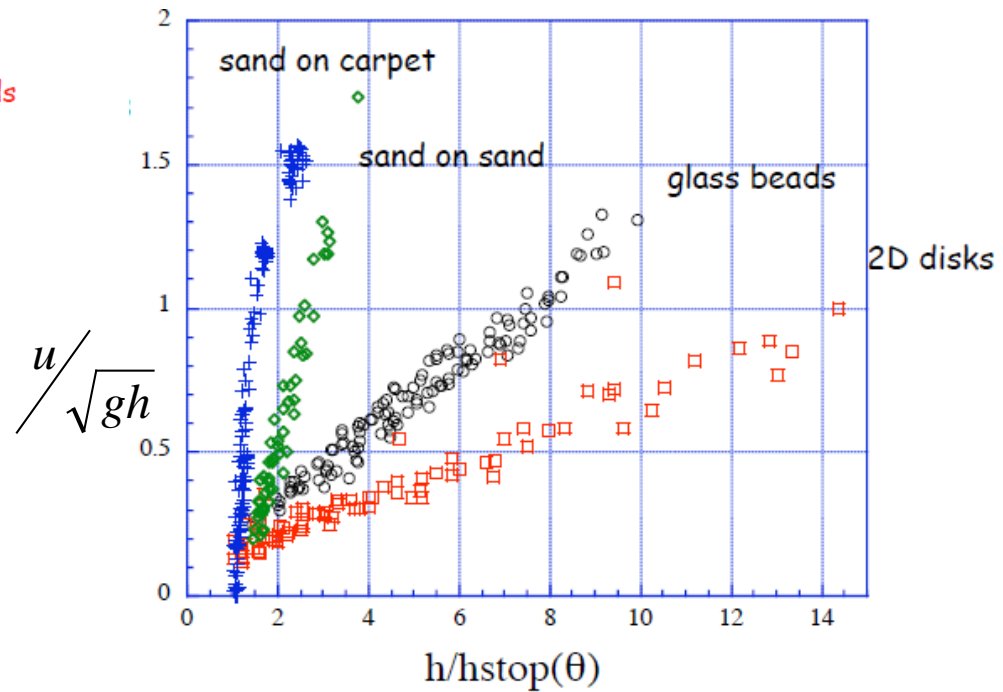
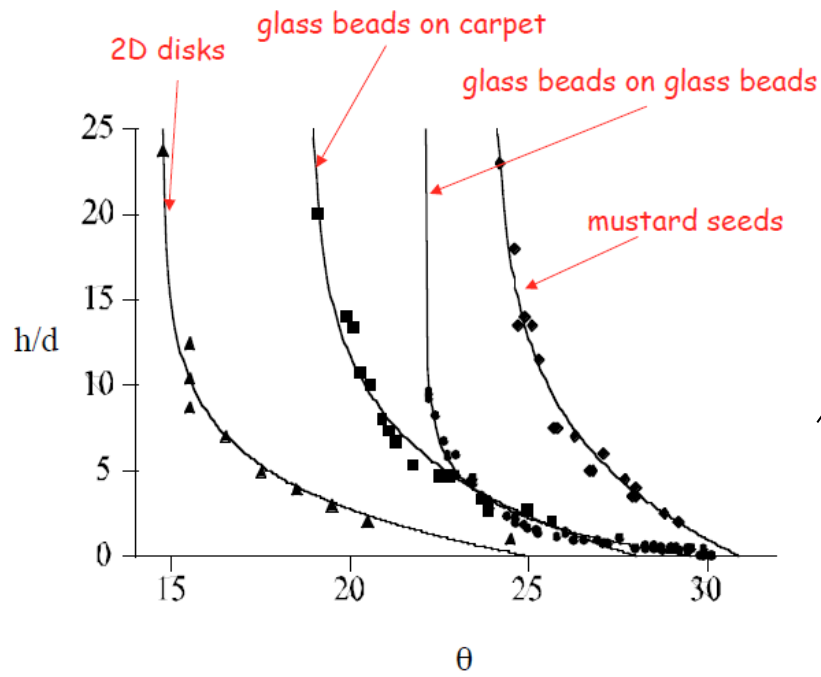
Expériences Pouliquen 99

Loi empirique (u : vitesse de surface) :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{\text{stop}}(\theta)}$$

h_{stop} : épaisseur de dépôt.

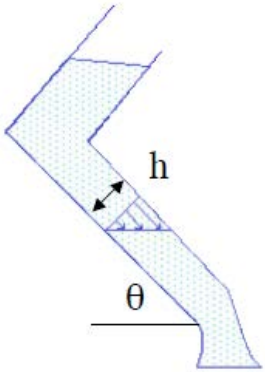
Résultats pour autres matériaux



Gdr Midi et al, 2004

- Corrélation entre vitesse et épaisseur de dépôt.
- La complexité semble se « réduire » à h_{stop} (et quelques coeff. près).

Coefficient de frottement effectif



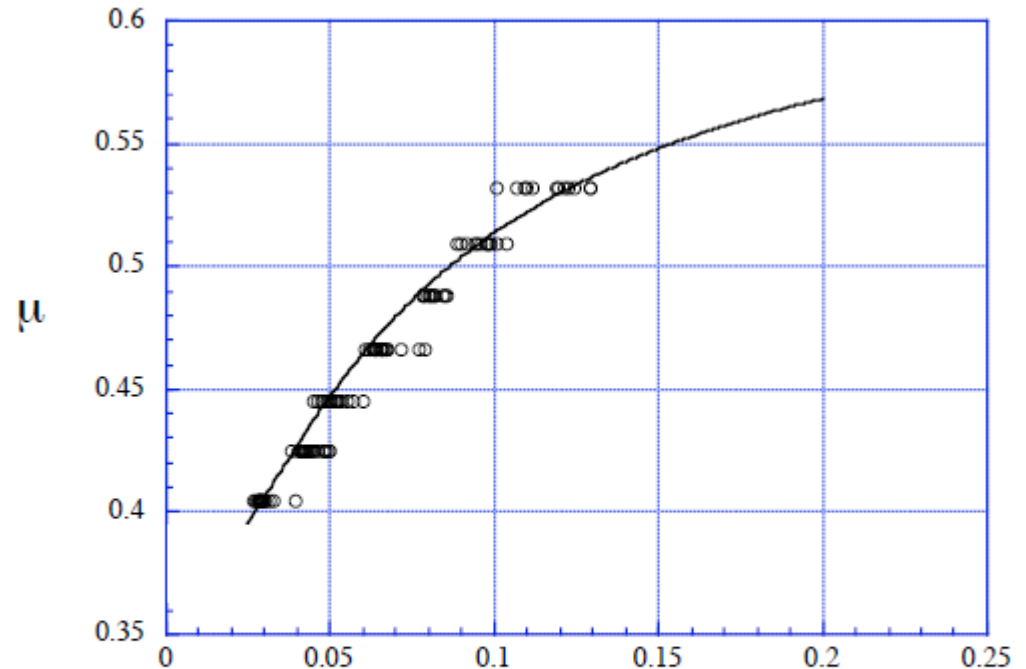
$$\mu = \tan \theta$$

frottement effectif .

$$\mu = \tau/P$$

τ : cisaillement

P : pression



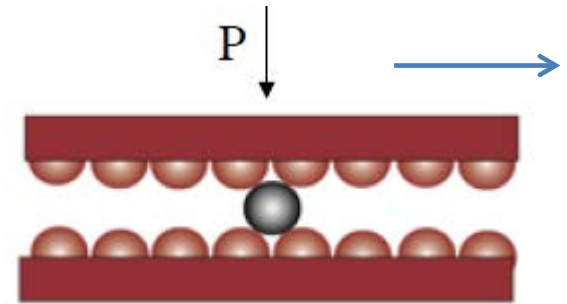
$$I = \frac{u d}{h \sqrt{gh}}$$

Nombre inertiel : I

- I : rapport entre deux temps :

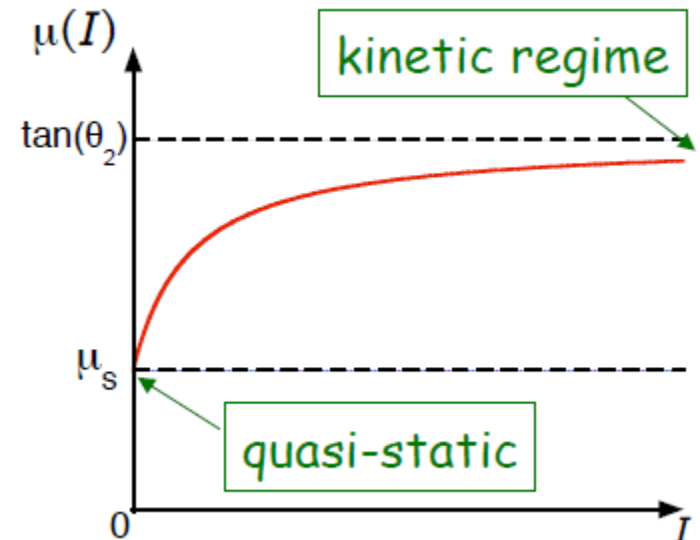
– Le temps de cisaillement : $1/\dot{\gamma}$

– Le temps de réarrangement : $d\sqrt{\rho/P}$

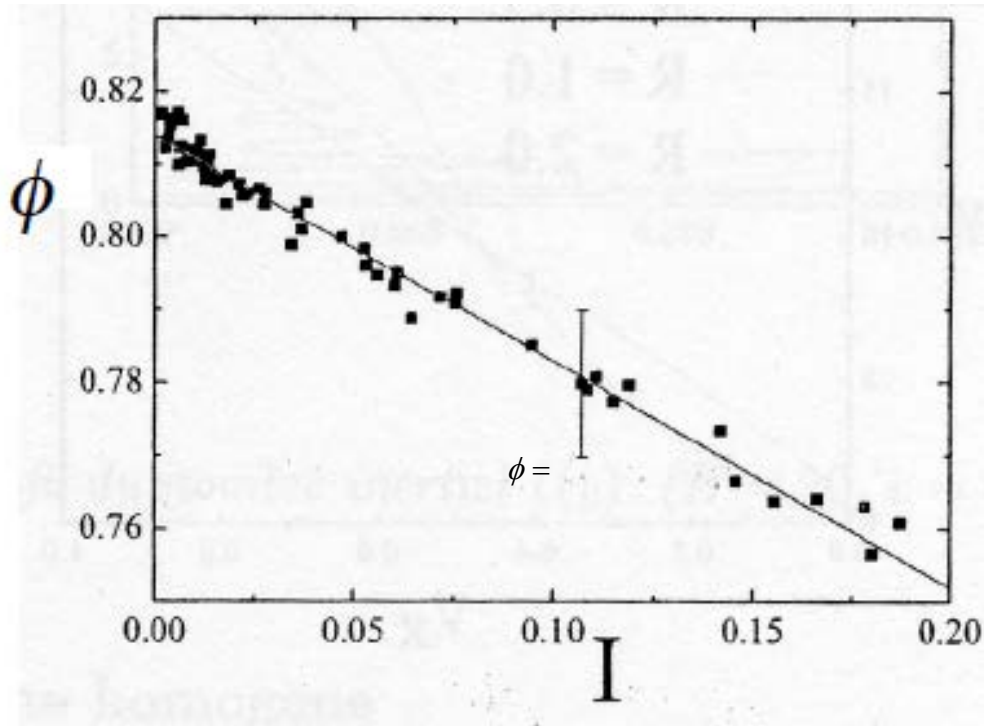


$$\tau = \mu(I)P \quad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}$$

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}$$



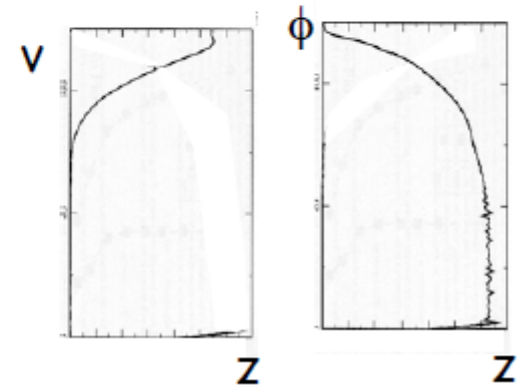
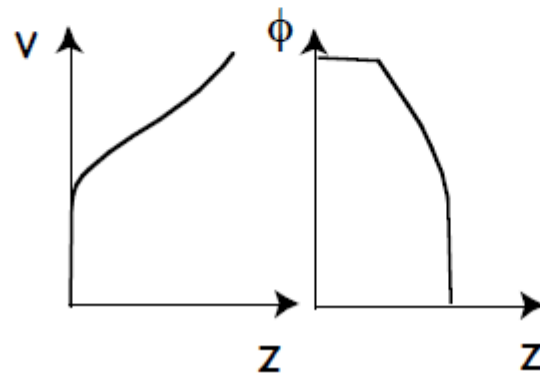
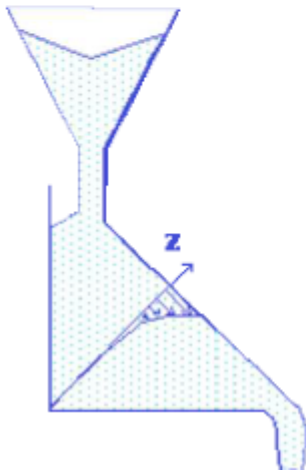
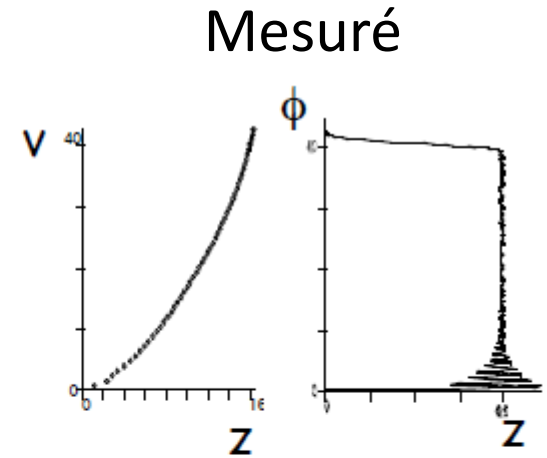
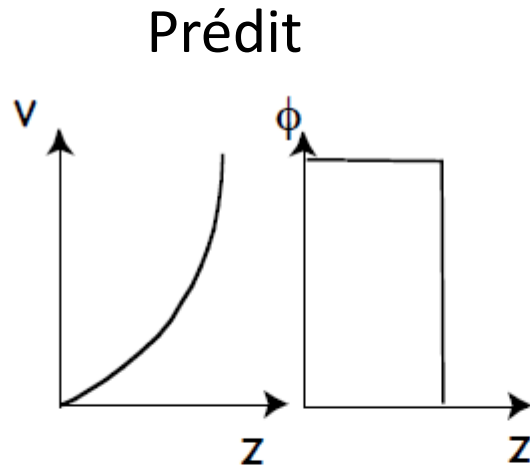
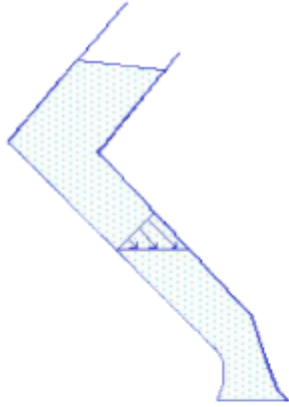
Fraction volumique



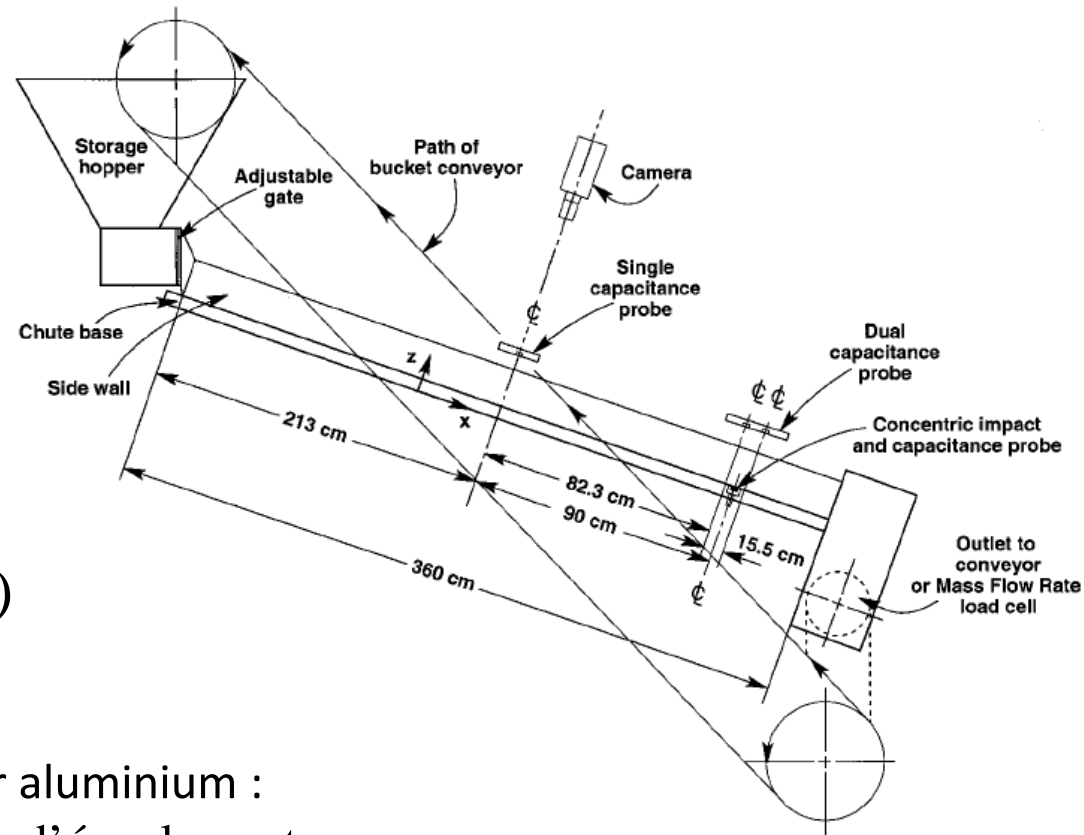
Da Cruz 03

$$\Phi = \frac{\text{volume occupé par solide}}{\text{volume total}}$$

Certains succès



Et les écoulements sur fond lisse?



M. Louge (2001)

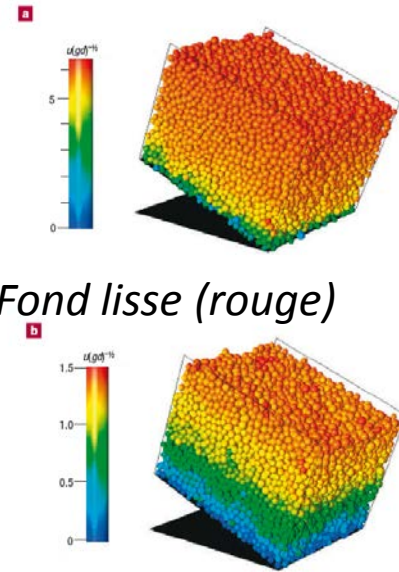
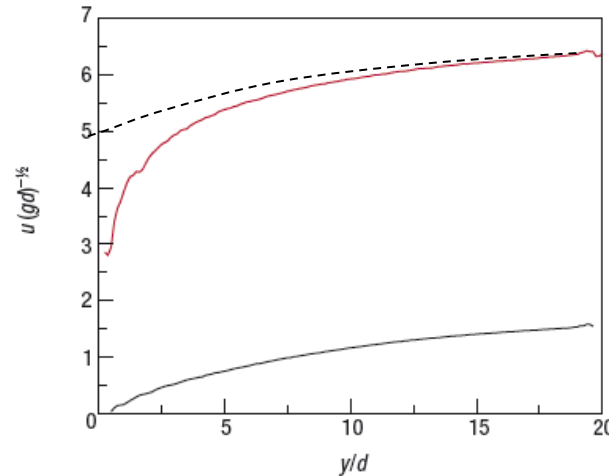
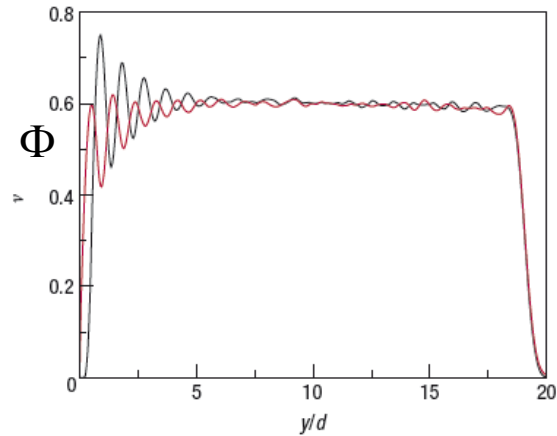
Billes de verre sur aluminium :

- $\theta < 15.5^\circ$: pas d'écoulement,
- $15.5^\circ < \theta < 20^\circ$: écoulements stationnaire établi,
- $\theta > 20^\circ$ écoulement accéléré.

Ne semble pas dépendre de h (dans la gamme explorée)

Présence d'ondes (« vagues »)

Comparaison fonds lisse et rugueux (simulations éléments discrets)

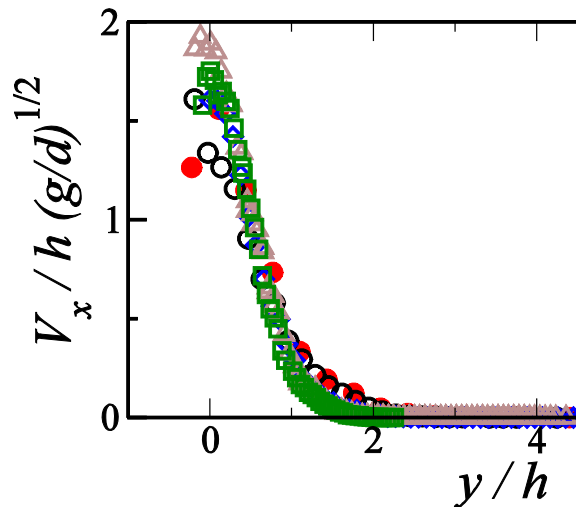
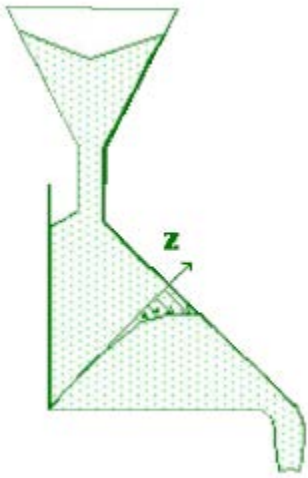


*Simulations 3D, Delannay et al. (2007) vitesse (droite)
fraction vol. (gauche)*

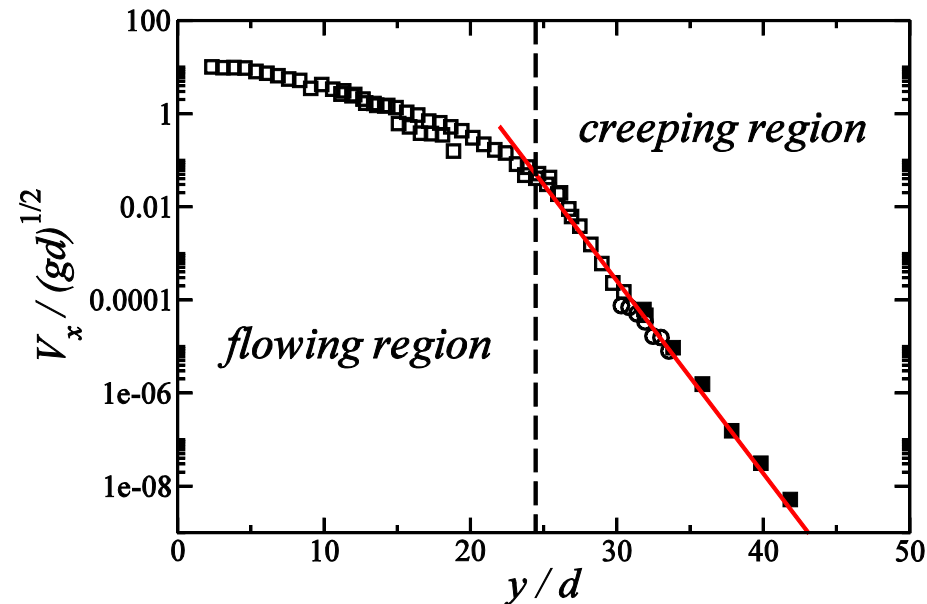
- Ecoulements mobilisés sur toute la hauteur, glissement à la base sur fond lisse
L'écoulement consiste en trois zones.
- Surface : la fraction volumique Φ décroît brutalement.
- Cœur : Φ remarquablement constante and indépendante de h , elle \downarrow quand $\theta \uparrow$
- Couche basale d'épaisseur $< 10d$: profil dépend de la nature de la base

... et des échecs

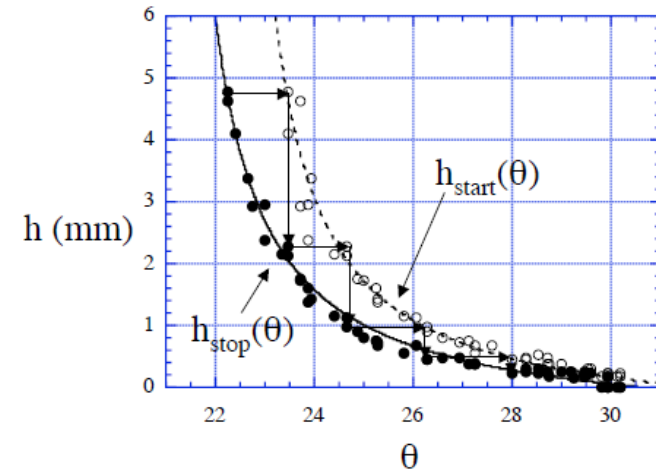
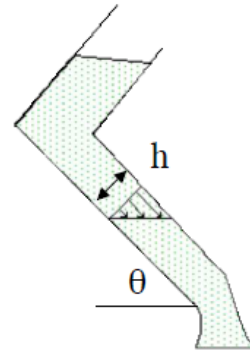
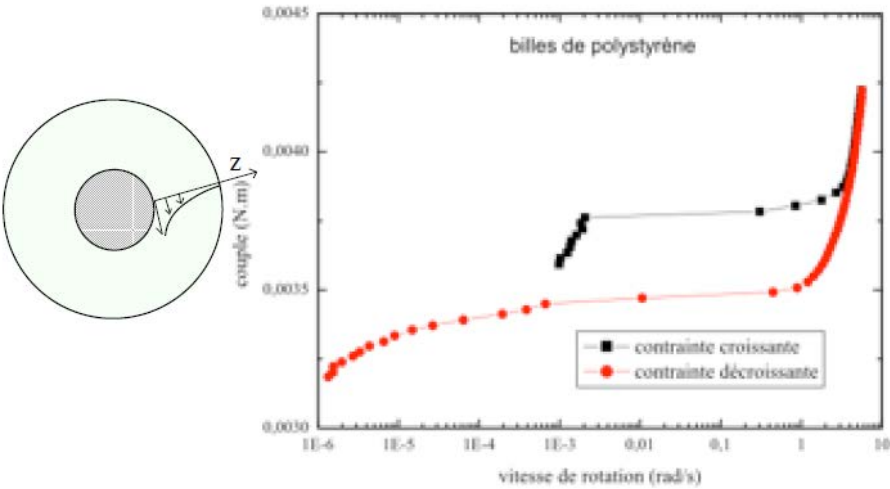
- Pb avec les conditions aux limites (parois)
 - Les profils de vitesse ne suivent pas les prédictions au voisinage des parois
 - On ne sait pas comment prendre en compte les conditions aux limites.
- Ne « marche » pas en quasi-statique (pas de queue exponentielle prévue par $\mu(I)$)



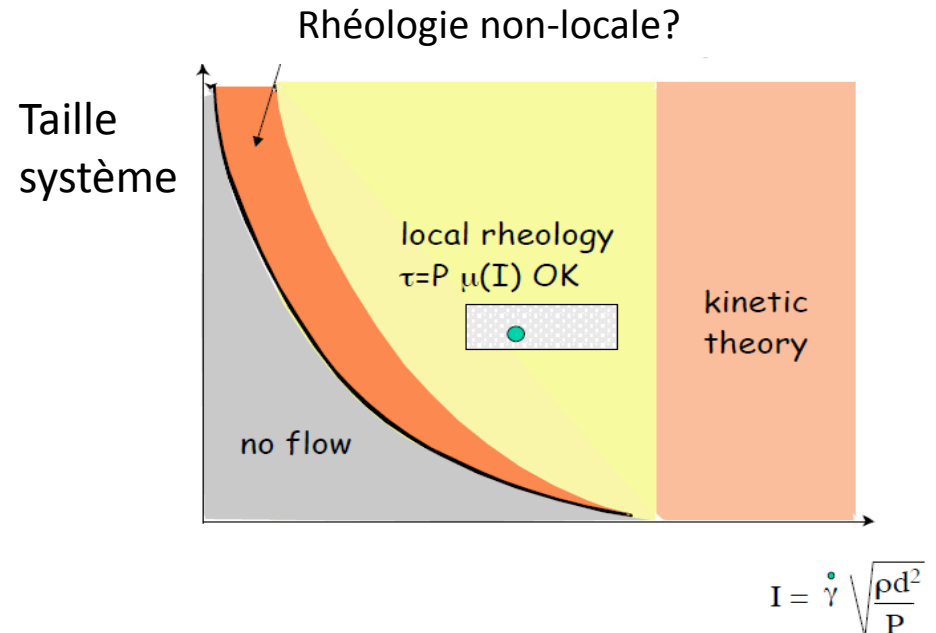
P. Richard et al. 2008



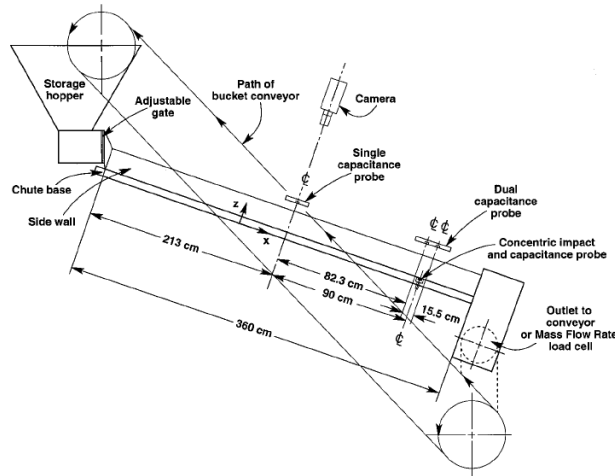
- Pas d'hystérésis dans $\mu(I)$



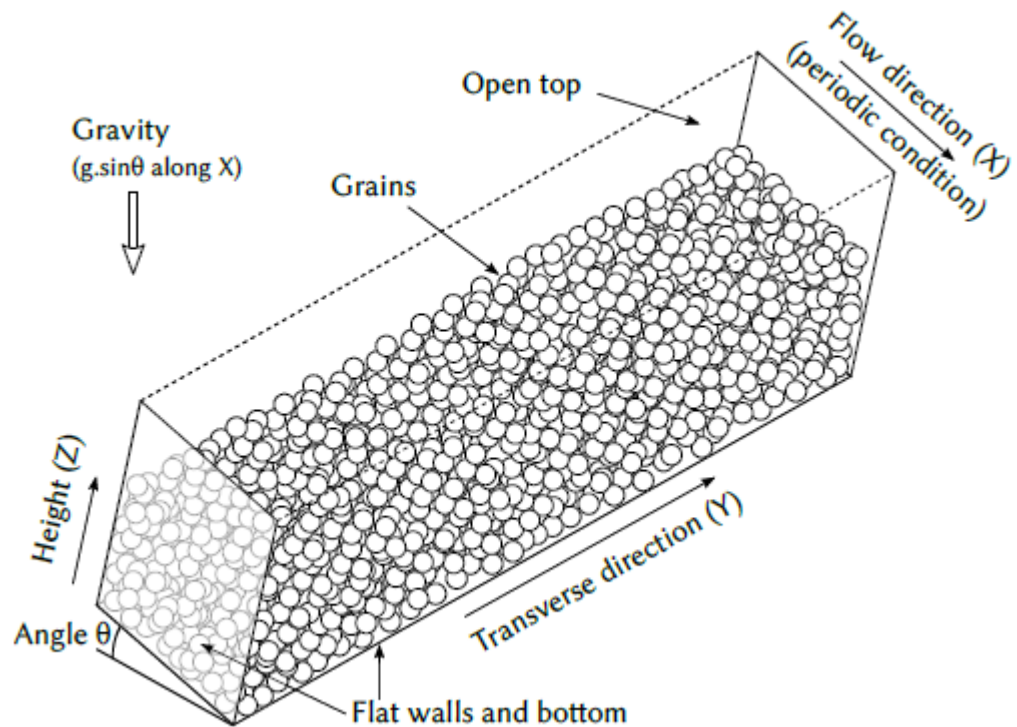
- Proposition (O. Pouliquen)



Simulations : éléments discrets, parois lisses (N. Brodu)



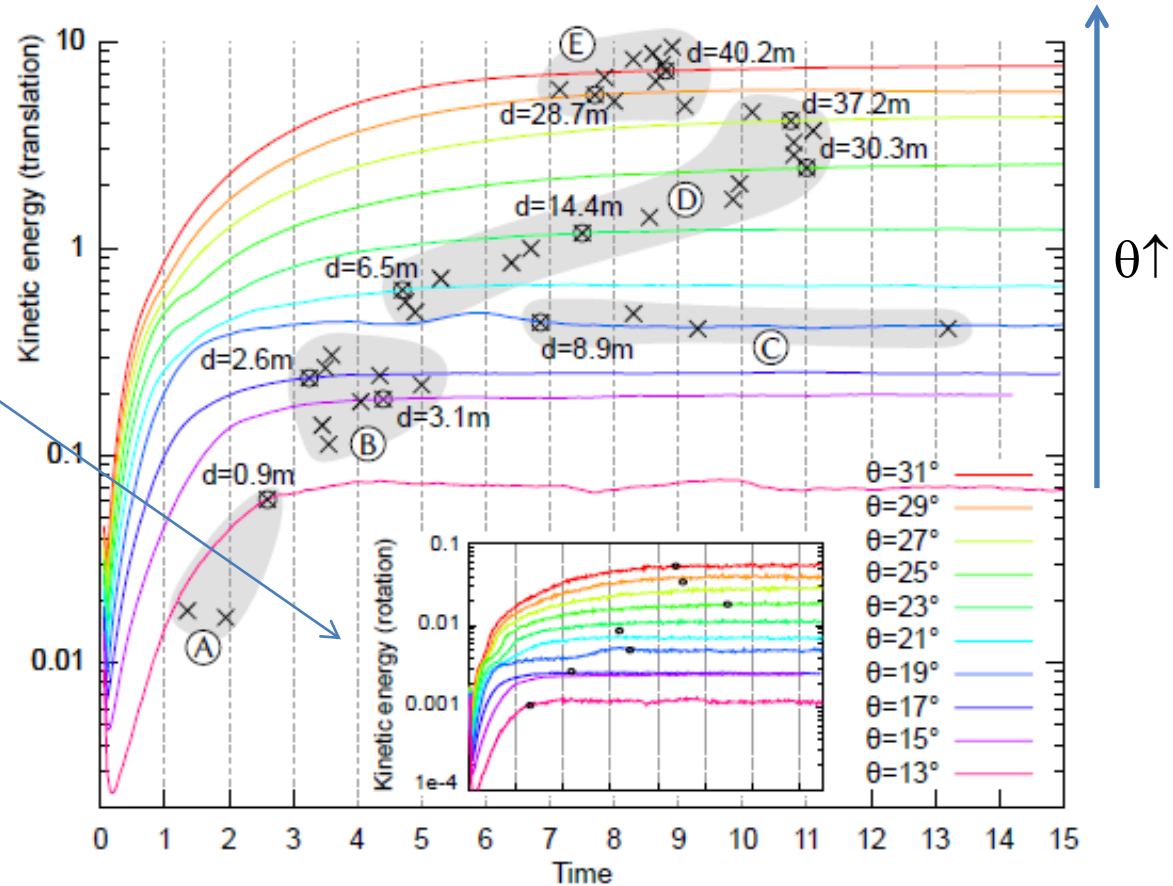
Film



- Les paramètres (grains, parois) sont ceux de l'expérience de M. Louge (2001).
- Conditions aux limites périodiques selon X (dir. écoulement)
- Débit d'alimentation remplacé par nombre de grains dans cellule unité.
- Même « épaisseur » de grains, faible énergie initiale des grains

Evolution de l'énergie des grains

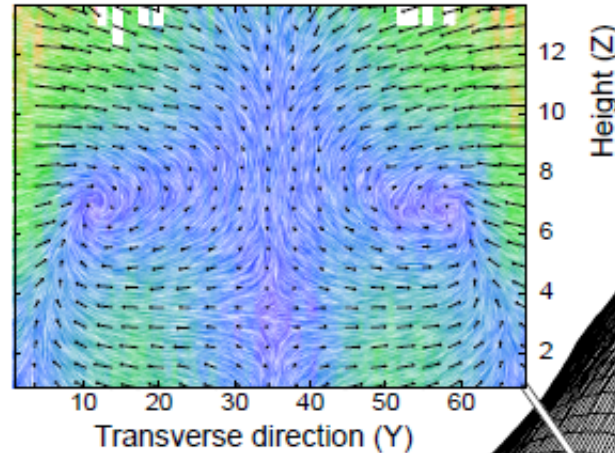
Energie cinétique de translation et de rotation (insert) de l'écoulement, au cours du temps, pour différents angles.



- Les distances d indiquées sont celles parcourues par les grains lorsque le régime stationnaire est atteint (moins de 5% d'écart à l'énergie limite)
- On distingue plusieurs régimes (A, B, C, D, E) correspondant à des nuages de points différents

Profil des vitesses moyennées dans l'épaisseur (en régime stationnaire établi)

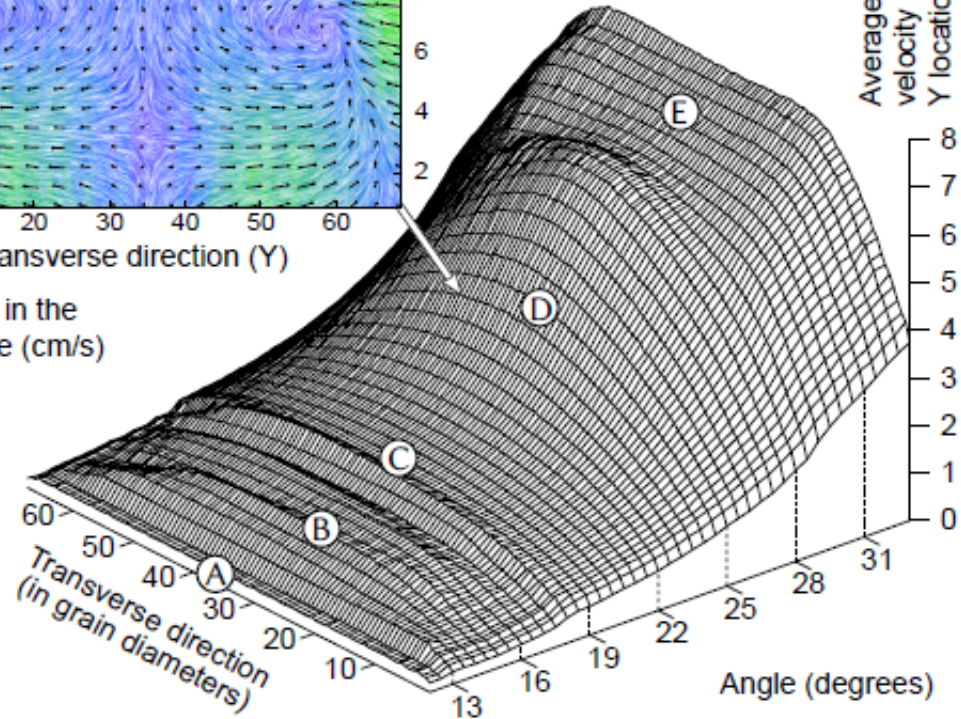
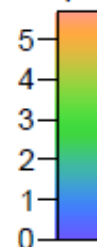
Champ de vitesse
dans une section



Ecoulements
secondaires
(rouleaux)
dans
phase D

La phase A
correspond à l'arrêt
(jamming)

Velocity in the
YZ plane (cm/s)



Phases B : régime stationnaire observé expérimentalement ($d < 3m$)

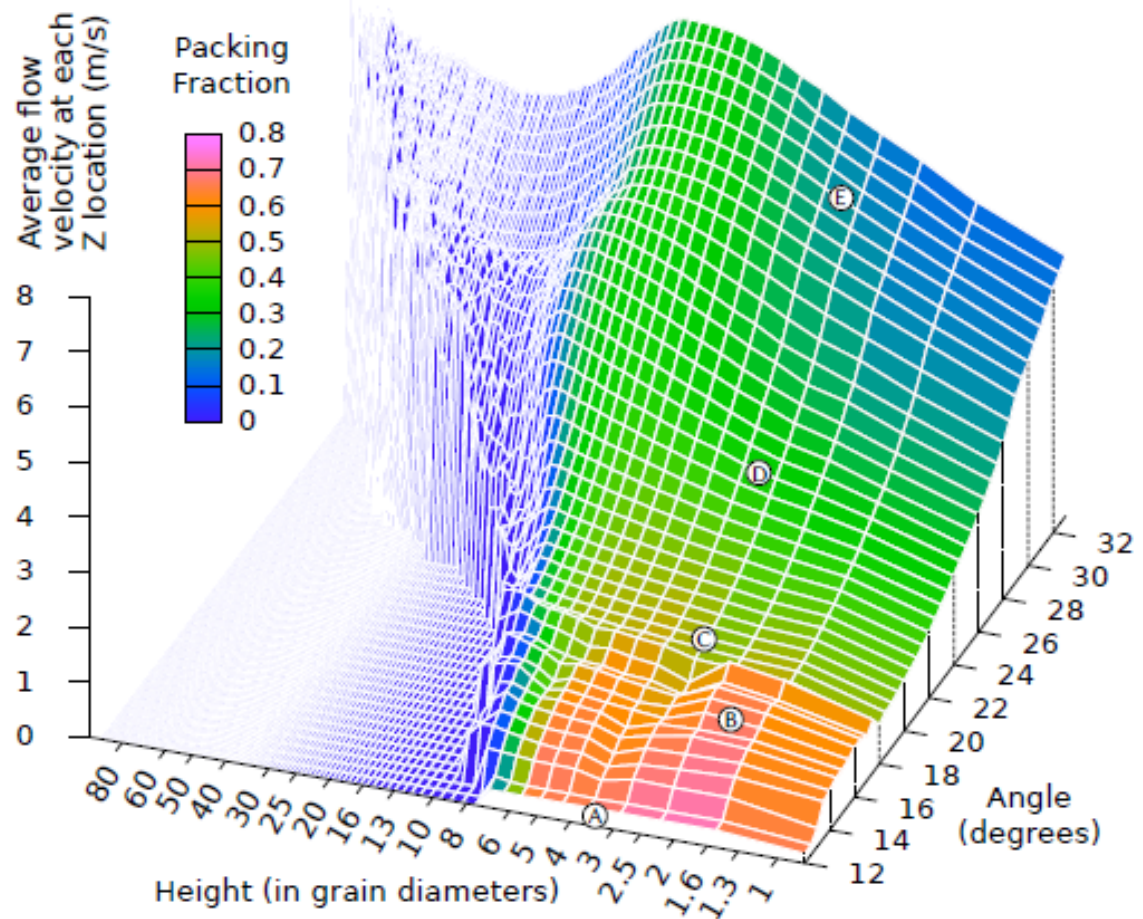
Phase C : oscillations → ondes signalées dans l'expérience?

B + C → intervalle d'angle correspondant au régime stationnaire + ondes de l'expérience

Profil de V et des Φ moyennés dans la largeur (en régime stationnaire établi)

Régimes B, C, E : vitesse et fraction volumique (code couleur) quasi uniformes dans la hauteur.

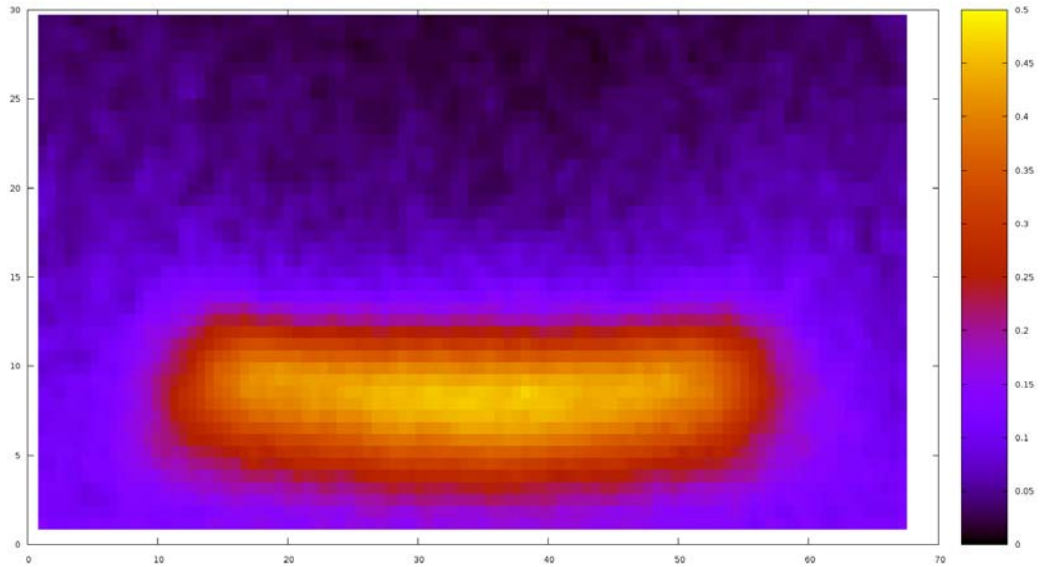
Régime D : zone intermédiaire dense « supportée » par une sone diluée à la base.



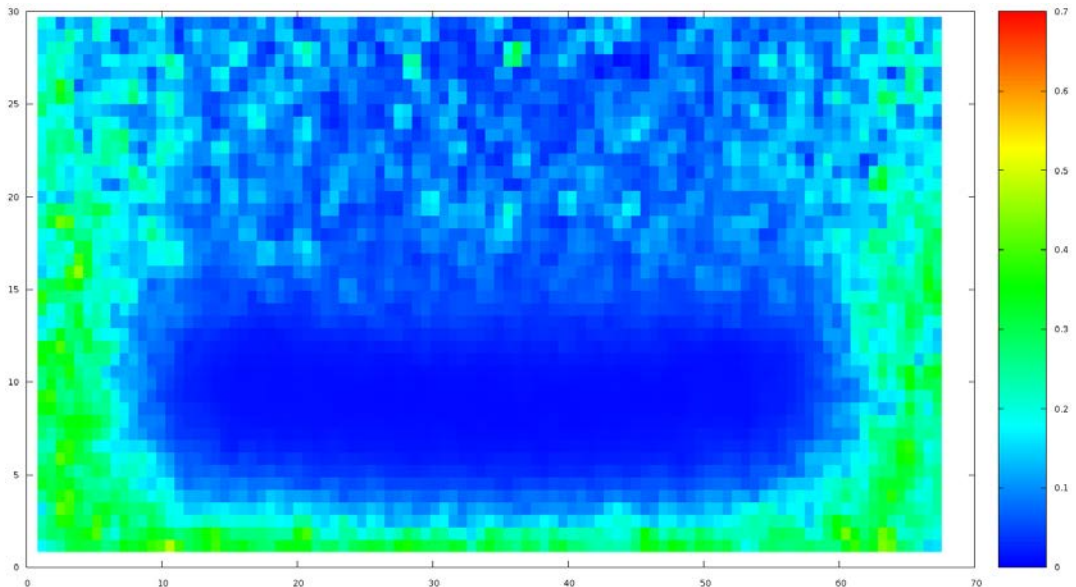
- Le noyau dense « glisse » sur la zone diluée (écart de vitesse)

Ecoulement supporté (Stationnaire établi)

Champ de fraction volumique dans une section.
Mise en évidence du noyau dense



Champ de température granulaire (fluctuations de vitesse) dans une section.
Effet « Leidenfrost » ou caléfaction granulaire.
Noyau « froid » en lévitation au dessus d'un fond « chaud »



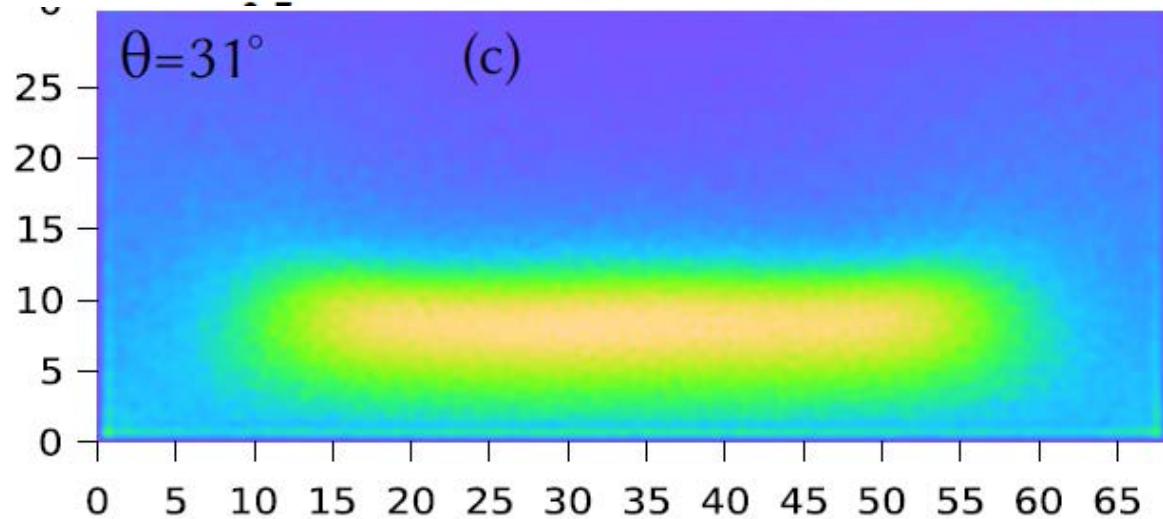
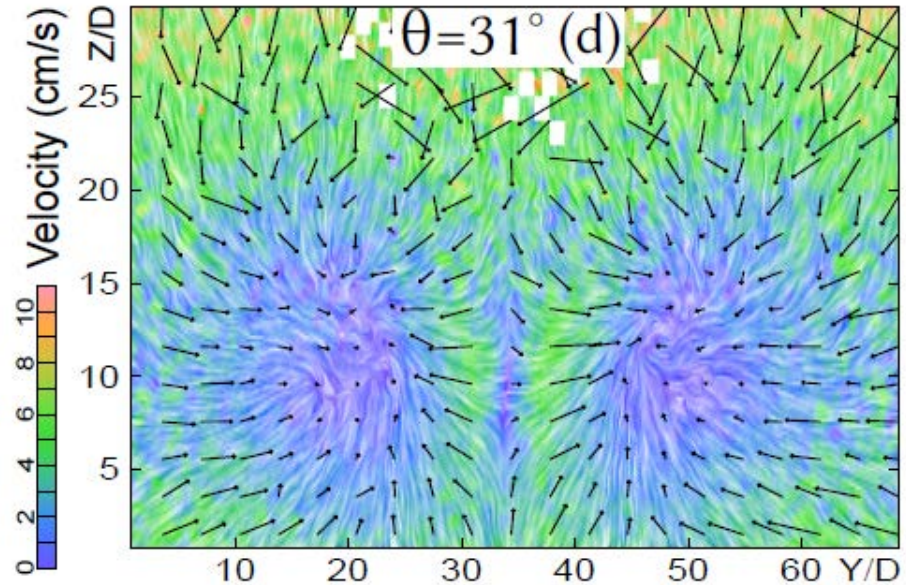
Un noyau ... dynamique

Champ de vitesse dans une section

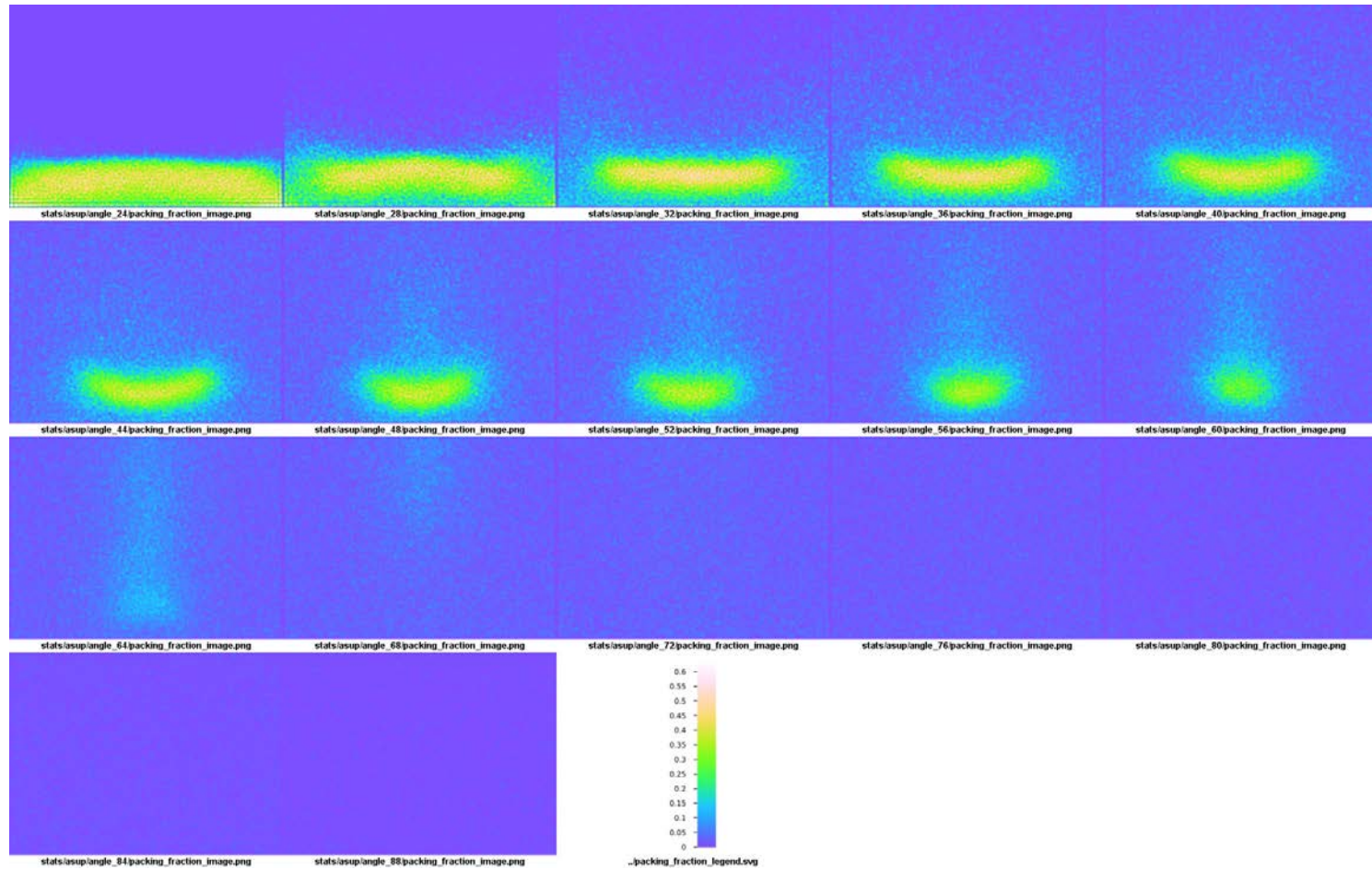
Champ de fraction volumique (même angle)

Le noyau n'est pas statique :

- échange de la matière
- Écoulement interne

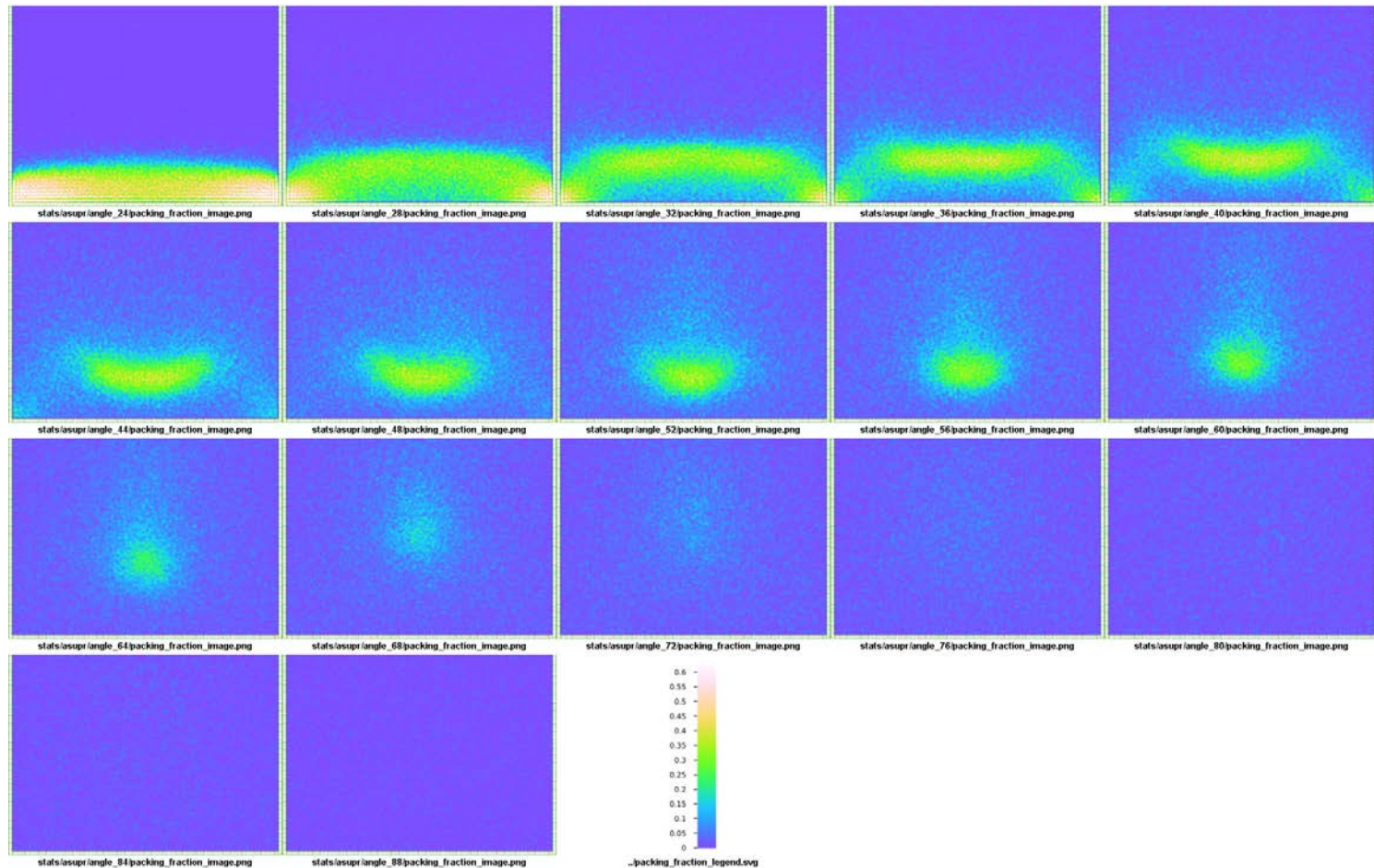


Transition régimes D-E, parois lisses



Champ de fraction volumiques dans une section, régime stationnaire établi, pour différents angles d'inclinaison, θ varie de 24 à 88° par incrément de 4°.

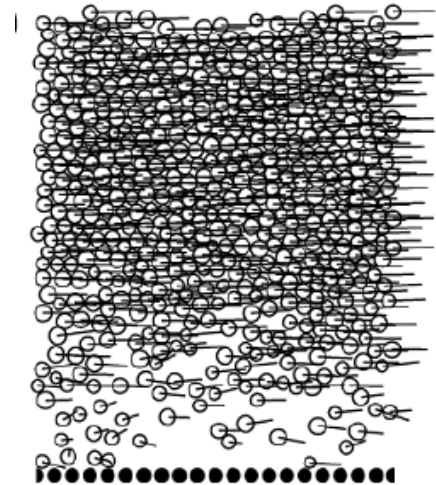
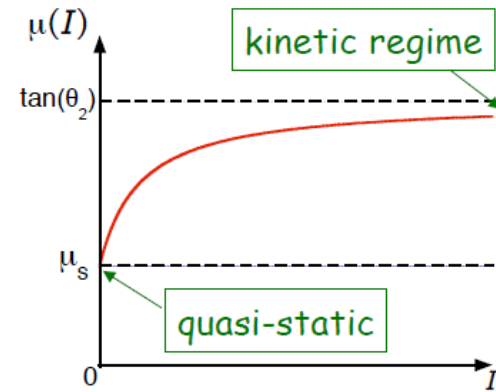
Transition régimes D-E, parois rugueuses



Même chose que sur le transparent précédent.

Conclusion

- Ces écoulements (y compris le régime de rouleaux, D) ne sont pas prévus par la rhéologie $\mu(I)$. Il ne suivent d'ailleurs pas cette loi.
- Certains paramètres dont l'influence a été peu étudiée peuvent encore apporter des surprises
 - exemples : C.I. très énergétiques (autre cas d'effet Leidenfrost).
 - Confinement : SSH
- Il reste du grain à moudre!



simulation 2D, N. Taberlet (2007)

$$\theta \approx 22^\circ, \frac{V_0}{\sqrt{gd}} = 57$$

Tas superstables

- N.Taberlet et al. (PRL (2003)) “Sidewall Stabilized Heaps” (SSH): couche de faible épaisseur en écoulement stationnaire et établi surmontant un tas “statique” se formant spontanément.
- Le frottement aux parois permet à la couche en mouvement de soutenir le tas à des angles d’inclinaison largement supérieurs à l’angle de repos et augmentant avec le débit de grains.

