Mathématiques appliquées et statistiques

2022

Consignes :

— L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

— Une copie à quadrillage millimétré est fournie avec l'énoncé.

— Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.

— Pour répondre à une question, il est possible d'admettre les résultats d'une question précédente non résolue, à condition que cela soit clairement indiqué sur la copie.

— La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer ou souligner,dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

— Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1

Tous les résultats numériques de cette partie seront donnés à $0,01$ près.

Avant la commercialisation d'un nouveau système d'alarme, un fabriquant cherche à déterminer son prix de vente de façon à réaliser un bénéfice maximal.

Partie I

Le fabriquant réalise une enquête pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels y en fonction du prix de vente x, en centaine d'euros, du sysème d'alarme. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Prix de vente unitaire x_i	Nombre d'acheteurs y_i
1	602
3	200
6	100
9	50
12	20
15	10
18	5
21	1

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,8}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour une unité et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 30 unités.
2. Calculer la moyenne et la variance du nombre d'acheteurs.
3. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?
4. On pose désormais pour tout $i \in [\![1; 8]\!]$, $z_i = \ln(y_i)$.
   (a) Présenter dans un tableau la nouvelle série (x_i, z_i).
   (b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Un ajustement affine est-il justifié ? On pourra notamment comparer au coefficient de corrélation linéaire obtenu à la question **3**.
   (c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.
   (d) En déduire une expression de y en fonction de x.

Partie II

Le coût de production unitaire d'un système d'alarme est de 300 euros. Afin de déterminer le prix de vente optimal, le fabriquant cherche à estimer le bénéfice net en fonction du prix de vente, c'est-à-dire la différence entre le chiffre d'affaire et le coût de production.

1. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le tableau suivant (les valeurs étant données en centaine d'euros).

Prix de vente unitaire x_i	Nombre d'acheteurs y_i	Coût de production total	Chiffre d'affaire	Bénéfice
3	200			
6	100			
9	50			
12	20			
15	10			
18	5			

2. Montrer que le bénéfice, en centaine d'euros, est donné en fonction du prix unitaire x par la formule

$$f(x) = (x - 3)e^{-0.29x+6.5}$$

3. Établir le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$. On y fera notamment figurer les limites en 0 et $+\infty$.
4. En déduire le prix de vente optimal et le bénéfice associé.

EXERCICE 2

Alice veut envoyer une information de type binaire à Bob (« vrai » ou « faux » par exemple), mais doit pour cela passer par n intermédiaires ($n \geq 1$) que l'on note $I_1, I_2, \cdots, I_n$.
Alice transmet le message à I_1, puis I_1 transmet le message à I_2, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'intermédiaire I_n transmette le message à Bob.
À chaque transmission, le message peut soit être correctement transmis, avec une probabilité $p \in]0; 1[$ soit être transmis de manière erronée, avec donc une probabilité $1 - p$. Ainsi, si deux transmissions sont successivement incorrectes, le message transmis est finalement le bon.
On suppose pour finir que toutes les transmissions sont indépendantes les unes des autres.
On note :
- T_k l'évènement « la k-ième transmission est correcte », pour tout entier $k \in [\![1; n+1]\!]$;
- X_n la variable aléatoire égale à 1 si Bob reçoit la bonne information, et à 0 sinon ;
- Y_n la variable aléatoire égale au nombre de transmission erronées ;
- Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'intermédiaires ayant reçu la bonne information.

Exemple de chaîne de transmission dans le cas $n = 2$

Alice	$\longrightarrow$	I_1	$\longrightarrow$	I_2	$\longrightarrow$	Bob
Information « vraie »	`transmission erronée`	*Information « fausse »*	`transmission correcte`	*Information « fausse »*	`transmission erronée`	*Information « vraie »*

Ainsi, l'exemple ci-dessus correspond aux évènements suivants :
- $\overline{T_1} \cap T_2 \cap \overline{T_3}$ puisque la première et la troisième transmission sont erronées, mais que la deuxième transmission, elle, est correcte ;
- $X_2 = 1$ puisque Bob a reçu la bonne information ;
- $Y_2 = 2$ puisque deux transmissions sont erronées ;
- $Z_2 = 0$ puisqu'aucun intermédiaire n'a reçu la bonne information.

Partie I

On suppose dans cette partie **uniquement** que $p = \frac{1}{3}$.

1. (a) Justifier que Y_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Donner par ailleurs $Y_n(\Omega)$ et la formule donnant $P(Y_n = k)$ en fonction de k, pour tout $k \in Y_n(\Omega)$.
   (b) Exprimer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n.
   (c) Calculer la probabilité que toutes les transmissions soient correctes.
   (d) En déduire la probabilité qu'au moins une des transmissions soit erronée.
2. On suppose dans la suite de cette partie que $n = 3$, p étant par ailleurs toujours égal à $\frac{1}{3}$.
   (a) Donner l'ensemble $Z_3(\Omega)$ des valeurs prises par Z.
   (b) Justifier que $P(Z_3 = 3) = P(Y_2 = 0)$. En déduire la valeur de $P(Z_3 = 3)$.
   (c) Exprimer l'évènement $[Z_3 = 0]$ en fonction des évènements T_1, T_2 et T_3 puis montrer que

$$P(Z_3 = 0) = \frac{2}{27}$$

(d) Justifier que

$$[Z_3 = 1] = \left(T_1 \cap \overline{T_2} \cap T_3\right) \cup \left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \overline{T_3}\right) \cup \left(\overline{T_1} \cap T_2 \cap \overline{T_3}\right)$$

puis en déduire la valeur de $P(Z_3 = 1)$.

(e) Calculer $P(Z_3 = 2)$, puis calculer $E(Z_3)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $n = 1$, c'est à dire qu'il n'y a qu'un seul intermédiaire (et donc deux transmissions) entre Alice et Bob.
   (a) Exprimer l'évènement $[X_1 = 1]$ en fonction de T_1, T_2, $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$.
   (b) En déduire la probabilité $P(X_1 = 1)$ en fonction de p.
   (c) Calculer $P(X_1 = 0)$.
   (d) Montrer que pour tout $p \in]0;1[$, $P(X_1 = 1) \geq P(X_1 = 0)$.

On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1, et on note $u_n = P(X_n = 1)$.

2. (a) Donner les valeurs de $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)$ et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1)$.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$u_{n+1} = (2p-1)u_n + 1 - p$$

3. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1\,, \qquad v_n = u_n - \frac{1}{2}$$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que

$$\forall n \geq 1\,, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2} - 2p(1-p)\right) \times (2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonctions f_n définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n.

Partie I

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $[1;+\infty[$, puis montrer que :

$$\forall x \in [1;+\infty[\,, \qquad f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

(b) En déduire le tableau de variations complet de f_n.

3. (a) Montrer que f_n admet un maximum M_n dont on précisera l'expression ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

4. Soit $x \in]1;+\infty[$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Interpréter graphiquement ce résultat.

5. (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_n' sur $[1;+\infty[$, montrer que :

$$\forall x \in [1;+\infty[\,, \qquad f_n''(x) = \frac{n(n+1)\ln(x) - (2n+1)}{x^{n+2}}$$

   (b) Étudier alors la convexité de f_n.

6. (a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_n$ en 1. On vérifiera en particulier que cette équation ne dépend pas de n.

   (b) Montrer que la tangente (T) se situe au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_n$. On pourra pour cela utiliser l'étude de la convexité faîte à la question **5.(b)**.

7. Sur un même graphique, tracer l'allure de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, ainsi que la tangente (T). On choisira pour échelle 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

Partie II

Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on note

$$I_n(A) = \int_1^A f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. (a) On considère la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$$

   Calculer la dérivée φ' de φ.

   (b) En déduire l'expression de l'intégrale $I_1(A)$ en fonction de A.

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

On suppose désormais que $n \geq 2$.

2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n(A) = \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2A^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2}$$

   (b) Déterminer $\lim\limits_{A\to+\infty} I_n(A)$.

   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

3. On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ (n-1)^2 f_n(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que g_n est une densité de probabilité.

4. Soit X_n une variable aléatoire admettant g_n pour densité.
   (a) Montrer que la fonction de répartition G_n de X_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{(n-1)\ln(x)}{x^{n-1}} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (b) Calculer la probabilité $P(X_n > e)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X_n admet une espérance, si et seulement si, $n \geq 3$ et que

$$\forall n \geq 3\,, \qquad E(X_n) = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2$$

-- Fin du sujet --