R 17 - 83

Ecole normale supérieure de Rennes

Département Droit-économie-gestion

Concours d'admission en 1re année

Session 2017

Épreuve à options

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Ce sujet comporte un total de 10 pages

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irréversiblement choisie** au moment de leur inscription.

Les trois options proposées sont :

- Droit commercial
- Droit public
- Mathématiques appliquées

Composition de droit commercial

Sujet :

Les enjeux des opérations sur fonds de commerce.

Composition de droit public

Sujet :

Le contrôle des autorités administratives indépendantes

et des autorités publiques indépendantes.

Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
- Deux feuilles de papier millimétré sont fournies avec l'énoncé.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
- Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (Quelques chiffres sur les dépenses de santé.)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur la part du PIB (Produit intérieur brut) consacrée par chaque pays aux dépenses de santé, l'autre sur l'évolution du secteur de l'optique en France.

A] Le chiffre d'affaire ainsi que le nombre de magasins d'optique sont en forte progression en France.

Le tableau ci-dessous *(calculé à partir de données de l'INSEE)* donne l'indice du nombre moyen de salariés par magasin en France de 2003 à 2011.

L'indice 100 étant fixé pour l'année 2003.

Année	Rang de l'année x_i	Nombre moyen de salariés par magasin y_i
2003	1	100
2004	2	99
2005	3	101
2006	4	98
2007	5	100
2008	6	99
2009	7	98
2010	8	96
2011	9	95

1) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,9}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 1 point d'indice, la graduation de cet axe commençant à 90.

2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,9}$.
Un ajustement affine est-il approprié ?

3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

4) En déduire une prévision pour l'année 2016. Quelle pourcentage d'augmentation cela représenterait-il par rapport à 2011 ?

5) En utilisant l'ajustement précédent, déterminer en quelle année le nombre moyen de salariés par magasin devrait avoir baissé de 10% par rapport à l'année 2003.
Quel niveau de confiance peut-on accorder à cette estimation ?

B] Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne la dépense totale de santé dans 24 pays de l'OCDE en 2011, en pourcentages du PIB.

Pays	Dépense totale de santé x_i	Pays	Dépense totale de santé x_i
États Unis	$17,7$	Espagne	$9,3$
Pays-Bas	$11,9$	Italie	$9,2$
France	$11,6$	Grèce	$9,1$
Allemagne	$11,3$	Finlande	9
Suisse	11	Irlande	$8,9$
Danemark	$10,9$	Slovenie	$8,9$
Autriche	$10,8$	Slovaquie	$7,9$
Belgique	$10,5$	Hongrie	$7,9$
Portugal	$10,2$	Rép. tchèque	$7,5$
Suède	$9,5$	Pologne	$6,9$
Royaume-Uni	$9,4$	Luxembourg	$6,6$
Norvège	$9,3$	Estonie	$5,9$

1) Quel est le type de la série statistique $(x_i)_{i=1...24}$?

2) Donner la dépense médiane ainsi que les premier et troisième quartiles. Donner l'écart interquartile.

3) Calculer la dépense moyenne.

4) Déterminer l'écart type de cette série statistique.

5) On admet que pour les 34 pays de l'OCDE, la dépense moyenne est de $9,4\%$ du PIB avec un écart-type de $2,2$.

On pose X la variable aléatoire réelle suivant une loi normale de moyenne $9,4$ et d'écart type $2,2$.

(a) Quelle est la probabilité que X soit inférieur à $6,1$?

(b) Déterminer $a > 0$ tel que

$$P(9,4 - a \leqslant X \leqslant 9,4 + a) = 0,99$$

(c) On considère qu'un pays est dans la norme des pays de l'OCDE, avec une erreur de 1%, si sa dépense de santé se situe dans l'intervalle $[9,4 - a\ ;\ 9,4 + a]$.

Les États-Unis sont-ils dans la norme ?

Exercice 2 (Probabilités)

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse à l'efficacité du dépistage d'une maladie, ainsi qu'au coût de son traitement.

Partie 1 – Test de dépistage.

On étudie la fiabilité d'un test dépistage d'une maladie touchant 2% de la population.
Le fabriquant indique que son test est fiable dans 95% des cas, c'est-à-dire que dans 95% des cas le test sera positif pour une personne réellement contaminée, et négatif pour une personne non contaminée.

On prend une personne au hasard dans la population.
On pose les événements suivants :

- T : « le test est positif. »
- C : « la personne est contaminée. »
- E : « le test se trompe. »

1) Donner la probabilité $P(C)$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(T)$.

2) Calculer la probabilité que la personne ait un test négatif et qu'elle soit contaminée.

3) Calculer la probabilité que la personne ait un test positif et qu'elle ne soit pas contaminée.

4) Ecrire E en fonction de T et C.
En déduire la probabilité $P(E)$.

5) Le test de la personne est positif, qu'elle est alors la probabilité qu'elle ne soit pas contaminée ?

Partie 2 – Estimation des coûts.

L'état met en place un centre de dépistage et de traitement pour un coût de fonctionnement journalier de 520€, auquel s'ajoute 80€ par vaccin.
Soit X la variable aléatoire réelle donnant le nombre de personnes à qui on administre le vaccin au cours d'une journée.
On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.
Soit Y la variable aléatoire réelle donnant le coût total d'une journée pour l'état.

1) Calculer $P(X \leqslant 2)$.

2) Exprimer Y en fonction de X.
En déduire l'espérance et la variance de Y.

3) Déterminer la probabilité que le coût total de la journée pour l'état soit supérieur ou égal à 700€.

Partie 3 – Nombre de cas.

Un laboratoire réalise une série de tests sur des personnes sélectionnées au hasard de manière indépendante. Chaque personne a 2% de chance d'avoir un test positif.
Pour une série de 40, on note Z la variable aléatoire donnant le nombre de tests positifs.

1) Déterminer la loi de Z.

2) Donner l'espérance et la variance de Z.

3) Calculer la probabilité qu'exactement 8 tests soient positifs.

Partie 4 – Temps d'incubation.

Lorsqu'une personne est contaminée, elle met un certain temps avant de présenter les premiers symptômes de la maladie : c'est le temps d'incubation.
Soit N la variable aléatoire réelle donnant le nombre de jours d'incubation de la maladie, pour une personne prise au hasard.
On admet que N suit une loi log-normale de moyenne 5 et variance 2.

1) Calculer la probabilité que le temps d'incubation soit inférieur à 15 jours.

2) Un personne vient d'être en contact avec une source de contamination. Combien de jours faut-il attendre pour que l'absence de symptômes nous permette d'affirmer avec une probabilité de 99% que la personne n'est pas contaminée.

Exercice 3 (Étude de fonctions)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n.

Partie 1

1) Déterminer le signe de $1 - n\ln(x)$.

2) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et montrer que

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

Dans toute la suite du problème, on pose

$$\alpha_n = e^{\frac{1}{n}}$$

3) Déduire des deux questions précédentes, le tableau de variations de f_n sur $]0;+\infty[$.
On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

4) Donner le maximum de la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ et l'abscisse en laquelle il est atteint.

5) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathcal{C}_n$.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier un point remarquable de la courbe de f_n.
On appelle dérivée seconde de f_n, notée f_n'', la dérivée de f_n'.

1) Calculer $f_n''(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et montrer que

$$f_n''(x) = \frac{n(n+1)\ln(x) - (2n+1)}{x^{n+2}}$$

2) Étudier le signe de f_n'' sur $]0;+\infty[$.

Dans toute la suite du problème, on pose

$$\beta_n = e^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$$

3) Justifier que $1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n$.

4) Donner une équation cartésienne de la tangente (Δ_1) à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse β_1.

5) On note (Δ_n) la tangente à $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse β_n.
On note φ_n l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_n$ et (Δ_n).

En posant $y = a_n x + b_n$ une équation de cette tangente (Δ_n), on a

$$\text{pour tout } x > 0,\ \varphi_n(x) = f_n(x) - a_n x - b_n$$

Justifier brièvement et avec un minimum de calcul que :

$$\varphi_n(\beta_n) = 0$$
$$\varphi_n'(\beta_n) = 0$$
$$\text{pour tout } x > 0,\ \varphi_n''(x) = f_n''(x)$$

Puis, à l'aide de la question **2)**, déterminer les variations de φ_n' puis son signe, sur $]0;+\infty[$.
En déduire les variations de φ_n puis son signe, sur $]0;+\infty[$.
En déduire enfin la position relative de $\mathcal{C}_n$ par rapport à (Δ_n).

Partie 3

1) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unité graphique est de 4 cm, les allures de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'axe des abscisses sera gradué de 0 à 6 et l'axe des ordonnées de -2 à 2.
On placera à chaque fois la tangente horizontale ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ aux points d'abscisse 1.
On tracera également la tangente (Δ_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse β_1.

2) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n-1}\left(x^{-n} - f_{n-1}'(x)\right)$$

3) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, une primitive de f_n sur $]0;+\infty[$.

4) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\int_1^e f_n(x)\,dx$.

En déduire, en fonction de n, l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

5) Calculer $\displaystyle\int_1^e f_1(x)\,dx$.

6) En déduire, l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000