Mathématiques Appliquées et Statistiques

Consignes :
- L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
- Deux feuilles (papier millimétré) en documents réponses.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.

Exercice 1 (Quelques statistiques judiciaires)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-2} près.

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur la conduite sans permis et l'autre sur les victimes de vols.

1) Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne le nombre de condamnations pour conduite sans permis ou malgré une suspension.

année x_i	rang de l'année x_i	nombre de condamnations y_i
2003	1	25 632
2004	2	34 774
2005	3	39 300
2006	4	48 775
2007	5	52 227
2008	6	52 905
2009	7	58 052
2010	8	57 158
2011	9	54 874
2012	10	56 714

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,10}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 2 cm pour 10 000 condamnations.

(b) Calculer la moyenne et la variance du nombre de condamnations.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) On effectue le changement de variable :

$$\forall i \in \{1, \ldots, 10\},\ z_i = \exp\left(\frac{y_i}{10\,000}\right)$$

Présenter dans un tableau la nouvelle série $(x_i; z_i)$.

(e) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Un ajustement affine est-il justifié ?

(f) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

(g) En déduire une expression de y en fonction de x.

(h) En déduire enfin une prévision pour l'année 2014.

2) On s'intéresse maintenant aux vols, le tableau suivant *(données calculées à partir de statistiques de l'INSEE)* donne le nombre de français ayant déclaré avoir subi un vol en 2012.

âge en années	Nombre de victimes déclarées en 2012 (en milliers)
$[14; 25[$	$662,6$
$[25; 40[$	$383,9$
$[40; 50[$	$202,8$
$[50; 70[$	$261,9$
$[70; 100[$	$148,6$

(a) Quel est le type de cette série statistique ?

(b) Tracer son histogramme.

(c) Quelles sont la ou les classes modales de cette série ?

(d) Peut-on estimer la tranche d'âge qui présente le plus grand pourcentage de victimes ? (si oui, la déterminer ; si non, dire quels renseignements manquent.)

Exercice 2 (Étude de fonctions)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

et on note C_n la représentation graphique de f_n.

Partie 1

1) Déterminer pour tout entier naturel n non nul le signe de $1 - n^2x^2$.

2) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3) Déduire des deux questions précédentes, le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$.

4) Pour tout entier naturel n non nul, donner le maximum de f_n sur E_n et en quelle valeur il est atteint.

5) Montrer que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x(1-n(n+1)x^2)}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}$$

En déduire les abscisses des points en lesquels C_n et C_{n+1} se coupent.
Puis la position relative de C_{n+1} par rapport à C_n.

6) On pose, pour tout entier n non nul, $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Calculer $f_n(\alpha_n)$.

7) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unités graphique est de 4cm, les allures de C_1 et C_2. On limitera le graphique aux abscisses positives.
On placera à chaque fois la tangente horizontale ainsi que les tangentes aux points d'abscisse 0 et α_1.

Partie 2

On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_n : x \mapsto \ln(1 + n^2x^2)$$

1) Déterminer la dérivée de G_n.

2) En déduire une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f_n(x)dx$. En déduire, en fonction de n, l'aire en cm^2 de la surface délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Partie 3

On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{2x}$$

et la fonction ψ définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$\psi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

1) Déterminer la dérivée de ψ. En déduire les variations de ψ.

2) Calculer $\psi(0)$, en déduire le signe de ψ sur $]-1; +\infty[$.

3) Calculer la dérivée de φ et en déduire, avec la question précédente, les variations de φ sur $]0;+\infty[$.

4) Pour quelle valeur de n la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f_n(x)dx$ est-elle maximum ?

Exercice 3 (Probabilités)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-4} près.

On s'intéresse à une usine de production de savons.

Partie 1 – Production de savons.

On sait que chaque savon à 1% de chance de présenter un défaut de fabrication. Chaque boîte contient 12 savons.

On tire au hasard une boîte en sortie d'usine et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de savons présentant un défaut dans cette boîte.

1) Déterminer la loi de X ?

2) Donner l'espérance et la variance de X.

3) Calculer la probabilité que la boîte ait au moins 2 savons défectueux.

Partie 2 – Un contrat.

Un grossiste commande des cartons de 300 savons, chaque carton coûte 250€ et l'usine réalise une marge par carton de 40€.

Le contrat stipule que l'usine devra payer une pénalité financière de 70€ pour chaque carton contenant au moins 3 savons défectueux.

1) On tire au hasard un carton et on considère la variable aléatoire Y égale au nombre de savons défectueux.

On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre 3.

(a) Calculer la probabilité qu'un carton ne contienne aucun savon défectueux.

(b) Montrer que la probabilité qu'un carton occasionne une pénalité financière est environ $0,5768$.

2) On considère maintenant la variable aléatoire G égale au gain réalisé sur un carton, tiré au hasard. (Ce gain tient compte de la pénalité.)

(a) À l'aide de la question précédente, donner la loi de G sous forme d'un tableau.

(b) Calculer l'espérance et la variance de G.

(c) L'entreprise doit-elle continuer de travailler avec ce grossiste ? (On justifiera la réponse.)

Partie 3 – Les réclamations.

On constate que 1% des savons présentent un défaut. Quand quelqu'un achète un savon défectueux, il porte réclamation dans 80% des cas. Mais si le savon n'est pas défectueux, il porte quand même réclamation dans 3% des cas.

On prend un client, qui a acheté un savon, au hasard. On considère les événements suivants :

- D : « Le savon est défectueux. »
- R : « Le client porte réclamation. »

1) Donner la probabilité $P(D)$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_D(R)$ et $P_{\overline{D}}(R)$.

2) Calculer la probabilité que le savon soit défectueux et que le client porte réclamation.

3) Calculer la probabilité que le savon ne soit pas défectueux et que le client porte réclamation.

4) En déduire la probabilité $P(R)$.

5) Un client porte réclamation, quelle est la probabilité que son savon ait réellement un défaut ?

Partie 4 – Réglage de la chaîne de production.

1) On souhaite vérifier que le réglage d'une des machines servant à la mise en forme des savons est correct.

On constate que la variable aléatoire M, qui à un savon sortant de la machine associe sa masse en grammes, suit une loi de Laplace-Gauss (aussi appelée loi normale) de moyenne 110 et d'écart type 8.

(a) Calculer la probabilité qu'un savon pèse au moins 100g.

(b) Si un savon a un poids compris entre 102g et 118g, il est conforme au standard de production. Sinon il est recyclé.

Quelle est la probabilité qu'un savon soit conforme ?

2) Afin d'estimer la production nécessaire pour satisfaire la demande. On s'intéresse à la durée de vie des savons :

On considère T la variable aléatoire égale au nombre de jours avant que le client ait totalement usé le savon.

On constate que T suit une loi log-normale de moyenne 4 et d'écart type 2.

Calculer la probabilité qu'un savon soit usé en moins de 20 jours.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000