C1983 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**

DROIT, ÉCONOMIE ET GESTION

Session 2009

Épreuve à Options

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irréversiblement choisie** au moment de leur inscription.

COMPOSITION DE DROIT COMMERCIAL

Sujet : Entreprise individuelle et société unipersonnelle

COMPOSITION DE DROIT PUBLIC

<u>Sujet :</u> L'administration des agglomérations urbaines en France.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET STATISTIQUES

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail (circulaire n°99 018 du 1er février 1999).

Tout résultat non justifié ne sera pas comptabilisé

La notation tiendra compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 : **Probabilités**

Les trois parties sont indépendantes et pourront être traitées séparément

Partie 1 : Un test d'examen comporte cinq questions pour lesquelles trois réponses sont proposées. Le candidat doit cocher la réponse exacte (on supposera qu'il n'y a qu'une seule bonne réponse). Considérons un candidat complètement ignorant qui répond au hasard.

1. Calculer la loi de probabilité du nombre X de réponses exactes d'un tel candidat.

2. En déduire la probabilité qu'il réponde correctement à au moins trois questions.

3. En moyenne, combien de réponses exactes obtiendra un candidat ignorant ?

4. Calculer l'écart type du nombre X de réponses exactes obtenues par un tel candidat.

Partie 2 : Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a, parmi les malades, un vacciné pour quatre non-vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y a un malade sur douze parmi les personnes vaccinées. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

Partie 3 : Un couple de vos relations a deux enfants mais vous avez oublié quel est le sexe de ceux-ci. Vous rencontrez ce couple avec l'un de ses enfants qui est une fille. Vous vous risquez alors à demander des nouvelles du garçon. Quelle probabilité avez-vous de vous tromper ? On désignera par A l'évènement « je rencontre le couple avec un de ses enfants qui est une fille ». On considèrera que la probabilité de la naissance d'une fille est égale à la probabilité de la naissance d'un garçon : $P\{G\} = P\{F\} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Statistiques

Partie 1 : On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 13 \times e^{-0,225x}$.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Etudier le sens de variation de f et compléter son tableau de variation.

3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé (On prendra 2 cm pour une unité).

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 2$.

Partie 2 : On considère la série statistique suivante représentant les variations d' un taux d'intérêt de 2003 à 2008. (Les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près).

Année	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
taux y_i	10,4	8,4	5,82	6,65	3,87	3,36

1. Représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans le repère de la partie 1.

2. La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f semble constituer une bonne approximation de ce nuage ce qui suggère un ajustement exponentiel de la série. On pose alors $Y_i = \ln y_i$.

a. Renseigner le tableau des valeurs de la série (x_i, Y_i).
b. Calculer la moyenne et la variance des deux variables ainsi que la covariance entre ces deux variables.
c. A l'aide des résultats de la question précédente, calculer le coefficient de corrélation entre ces deux variables.
d. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en x. Evaluer la qualité de l'ajustement réalisé.
d. Donner une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k \times e^{ax}$.

3. En supposant que l'évolution du taux d'intérêt se poursuive sur le même modèle, à partir de quelle année, ce taux sera-t-il inférieur à 2 ?

Exercice 3 : Algèbre et analyse

Les exercices sont indépendants et pourront être traités séparément

Partie 1 :

1. Déterminer les points fixes éventuels des fonctions définies par les expressions :

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x+4}$ et $g(x)=\sqrt{2x+1}-1$

2. On considère la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\dfrac{1}{x}$.

a. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On notera k son prolongement.
b. Montrer que k est dérivable sur l'ensemble des réels et donner sa dérivée k'.
c. Montrer que k est C^1.

3. Déterminer les points critiques de la fonction f définie par $w(x) = x^2 (x + x^2)$ puis calculer la dérivée seconde en ces points. En déduire les extrema locaux de la fonction w.

Partie 2 :

1. Une fonction f(x,y) est dite homogène de degré α si, pour tout réel positif λ, on a :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha \times f(x,y).$$

a. Lorsque f est homogène de degré α, montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha\times f(x,y)$

(Cette égalité est appelée Identité d'Euler).

b. On pose f(x,y) = $x^2y+(xy)^{\frac{3}{2}}$:

- montrer que f est homogène,
- préciser son degré,
- montrer que la fonction vérifie l'identité d'Euler.

2. **S**oit la fonction y définie par $y=\dfrac{xz}{x+z}$. Calculez $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,z)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial z}(x,z)$ ainsi que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,z)$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}(x,z)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,z)$ puis écrire la différentielle totale d'ordre 2 de la fonction y.

3. La fonction f est une fonction différentiable. Soit $z = f(x,y)$ où $x = r \times \cos \theta$ et $y = r \times \sin \theta$.

a. Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

b. Démontrer que $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

4. En quels points la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ prend des valeurs extrêmes ?

Partie 3 :

1. On pose $I_1 = \int_1^2 \dfrac{t^2 + t - 1}{t \times (1+t)^2} dt$

a. Montrer que $\forall t \in R\{-1;\ 0\}$, on a : $\dfrac{1}{(1+t)^2} + \dfrac{2}{1+t} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t^2 + t - 1}{t \times (1+t)^2}$.

b. En déduire la valeur exacte de I_1.

2. Calculer $I_2 = \int_{-\ln 3}^{-\ln 2} \dfrac{e^z}{1 - e^{2z}} dz$ à l'aide d'un changement de variables.

3. Montrer que $I_3 = \int_{e^2}^{e^3} \ln(t) dt = e^2 \times (2e - 1)$.

Partie 4 :

1. Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits de deux matrices possibles.

2. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Fin de l'épreuve