

Comprendre la forme d'une fibre nerveuse

Yannick PRIVAT

Laboratoire MAPMO

Fédération Denis Poisson - Université d'Orléans & CNRS

21 janvier 2009

MAPMO
MAPMO

Les objectifs : comprendre l'origine des formes présentes dans la nature

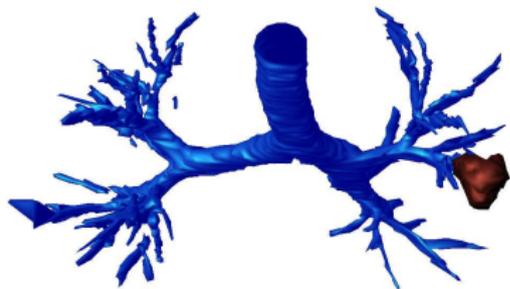


FIGURE: Deux exemples de structures arborescentes dichotomiques dans la Nature

Plan de l'exposé

- 1 Présentation des modèles
 - Modèles biologiques et mathématiques
 - Choix du critère d'optimisation
 - Solution des problèmes d'optimisation de forme
- 2 Atténuation spatiale - Cas d'une fibre connectée au soma
- 3 Atténuation Temporelle - Cas d'une fibre connectée à d'autres fibres
- 4 Perspectives

Principe de modélisation inverse

QUESTION

Les formes présentes dans la Nature tentent-elles d'optimiser un certain critère ?

- On considère un organe ou une partie du corps humain.
- On écrit un modèle mathématique (par exemple une EDP) traduisant le comportement de cet organe.
- On imagine un critère (numérique) que la Nature pourrait vouloir optimiser.
- On résout le problème d'optimisation de formes correspondant.
- On compare avec les formes réelles.

Optimisation de la forme d'une fibre nerveuse

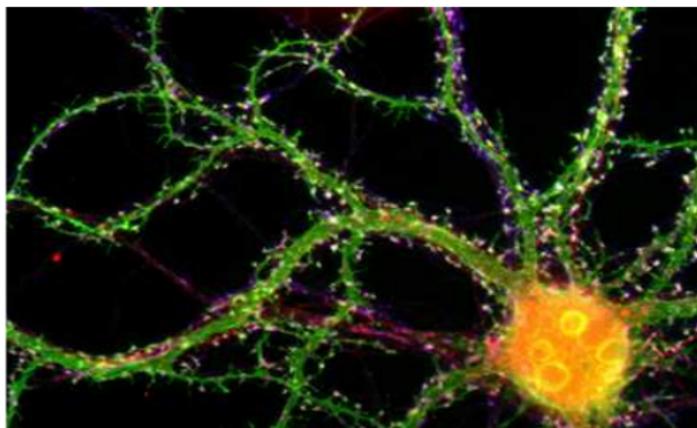
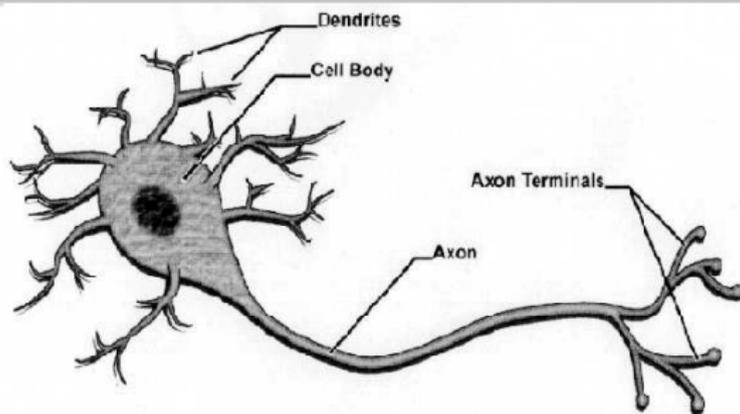


FIGURE: Source : Plateforme d'Imagerie Cellulaire de l'Institut des Neurosciences de Bordeaux.

Choix du modèle

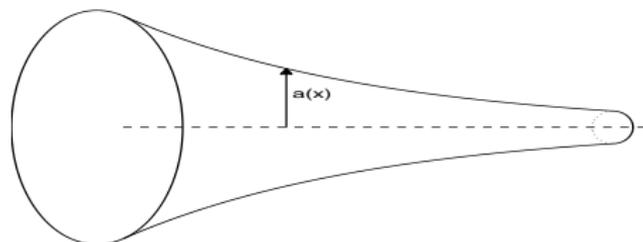


L'exemple des axones et des dendrites

- Prolongements nombreux qui se ramifient autour du corps cellulaire
- Permettent à quantité de neurones de se connecter entre eux
- Recueillent les signaux électriques transmis au neurone par les axones d'autres neurones

Notations et hypothèses

- On considère une fibre à **symétrie cylindrique** de longueur ℓ et rayon $a(x)$;
- $v(x, t)$: différence de potentiel de la membrane par rapport à l'état au repos ;



Les modèles mathématiques (W. RALL, 1962)

On suppose qu'à $t = 0$, la fibre reçoit une impulsion modélisée par une masse de Dirac : $i_0(t) = \delta_{\{t=0\}}$.

- x : variable 1D d'espace ($x \in [0, \ell]$).
- t : variable de temps ($t \geq 0$).

♠ Fibre connectée au soma par la gauche.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (a^2 \frac{\partial v}{\partial x}) = a\sqrt{1+a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \right) \\ \pi a^2(0) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(0, t) + v(0, t) \right) - i_0(t) \\ a(\ell) \frac{\partial v}{\partial x}(\ell, t) = 0 \end{array} \right.$$

Les modèles mathématiques (W. RALL, 1962)

♠ Fibre connectée à d'autres fibres.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (a^2 \frac{\partial v}{\partial x}) = a\sqrt{1+a^2} (\frac{\partial v}{\partial t} + v) \\ \pi a^2(0) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = -i_0(t) \\ a^2(l) \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions au bord en $x = 0$ sont de deux ordres :

- **Robin** dans le cas d'une fibre connectée au soma.
- **Neumann** dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres.

Choix du critère d'optimisation (1)

Une décomposition spectrale de la solution permet d'écrire :

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(0) \phi_n(x) \exp\left(-\frac{\lambda_n + 2}{2} t\right).$$

où ϕ_n est la solution du problème aux valeurs propres :

Fibre connectée au soma

Fibre connectée à d'autres fibres

Couple (λ_n, ϕ_n) solution de

$$\begin{cases} -(a^2 \phi_n')' = \lambda_n a \sqrt{1 + a'^2} \phi_n \\ \phi_n'(0) + \frac{\lambda_n + 1}{a^2(0)} \phi_n(0) = 0 \\ \phi_n'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Couple (λ_n, ϕ_n) solution de

$$\begin{cases} -(a^2 \phi_n')' = \lambda_n a \sqrt{1 + a'^2} \phi_n \\ \phi_n'(0) = 0 \\ \phi_n'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Choix du critère d'optimisation (2)

On a les estimations asymptotiques :

- Fibre connectée au soma (Conditions de type Robin)

$$v(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi} \phi_1(x) e^{-\frac{\lambda_1(a)+2}{2}t}.$$

- Fibre connectée à d'autres fibres (Conditions de type Neumann)

$$v(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi} \phi_0(0)^2 e^{-t} + \frac{1}{2\pi} \phi_1(0) \phi_1(x) e^{-\frac{\lambda_1(a)+2}{2}t}.$$

Choix du critère d'optimisation (3)

Une autre proposition de critère

Fonction de transfert

$$T(a) := \frac{\int_0^{+\infty} v(0, t) dt}{\int_0^{+\infty} v(l, t) dt}.$$

T mesure l'atténuation du signal entre le début et la fin de la fibre.
On peut chercher à minimiser T dans une classe raisonnable.

Remarque

En utilisant la transformée de Laplace \mathcal{L} , ce critère se réécrit :

$$T(a) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(v)(0, p)}{\mathcal{L}(v)(l, p)}.$$

Choix du critère d'optimisation (4)

Les contraintes sur le rayon a

- i De régularité : $a \in W^{1,\infty}(0, \ell)$. (a est Lipschitz)
- ii Ponctuelle : $\forall x \in [0, \ell], a(x) \geq a_0 > 0$.
- iii De surface : $\int_0^\ell a(x) \sqrt{1 + a'^2(x)} dx \leq S$. (surface latérale de la fibre bornée)

$\mathcal{A}_{a_0, S}$ = classe des fonctions vérifiant i, ii et iii.

Choix du critère d'optimisation (5)

Les 4 problèmes d'optimisation de forme à résoudre.

Fibre connectée au soma ou fibre connectée à d'autres fibres

Atténuation temporelle du message

$$\begin{cases} \min \lambda_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0, S} \end{cases}$$

Atténuation en espace du message

$$\begin{cases} \min T(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0, S} \end{cases}$$

Les solutions

	Fibre connectée au soma	Fibre connectée à d'autres fibres
Atténuation temporelle	Solution : $a \equiv a_0$	pas de solution
Atténuation spatiale	Solution : $a \equiv a_0$	Solution : $a \equiv a_0$

Les solutions

	Fibre connectée à au soma	Fibre connectée à d'autres fibres
Atténuation temporelle	Solution : $a \equiv a_0$	pas de solution
Atténuation spatiale	Solution : $a \equiv a_0$	Solution : $a \equiv a_0$

On va détailler un peu le résultat encadré.

Atténuation spatiale - Cas d'une fibre connectée au soma

Théorème

Dans le cas d'une **fibre connectée au soma**, le problème

$$\begin{cases} \min T(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0, S} \end{cases}$$

a pour solution $a \equiv a_0$.

On rappelle que le potentiel v est solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a \sqrt{1 + a'^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \right) \\ \pi a^2(0) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(0, t) + v(0, t) \right) - \delta_{\{t=0\}} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

Ingrédients de la preuve (1)

Un changement de variable

On introduit le changement de variable

$$y = \int_0^x \frac{dt}{a^2(t)}.$$

Notations

- $\rho(y) := a^3(x) \sqrt{1 + a'^2(x)}.$
- $\ell_1 := \int_0^\ell \frac{dt}{a^2(t)}.$

Conséquences

La condition $a \geq a_0$ devient $\rho \geq a_0^3$.

La condition $\int_0^\ell a(x) \sqrt{1 + a'^2(x)} dx \leq S$ devient $\int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \leq S.$

Ingrédients de la preuve (2)

Réécriture du critère T

- On écrit l'EDP satisfaite par $\mathcal{L}(v)$, transformée de Laplace de v , définie par :

$$\forall x \in [0, \ell], \forall t > 0, \forall p \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(v)(x, p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(x, t) dt.$$

- On pose $w_p(y) := \mathcal{L}(v)(x, p)$. Alors, on a :

$$T(a) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{w_p(0)}{w_p(\ell_1)}.$$

Ingrédients de la preuve (3)

Réécriture du critère T

- Des techniques variationnelles permettent d'établir que :

$$T(a) = T_1(\rho) = \frac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)},$$

où w_0 est solution de l'EDO :

$$\begin{cases} w_0'' = \rho w_0 & y \in (0, \ell_1) \\ \pi w_0'(0) = w_0(0) - 1 \\ w_0'(\ell_1) = 0. \end{cases}$$

Ingrédients de la preuve (4)

Un problème auxiliaire

On s'intéresse à un problème proche de celui qui nous occupe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1}^M := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1) \mid a_0^3 \leq \rho \leq M \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \leq S \right\}, \end{array} \right.$$

avec $M > a_0^3$.

Dans cette classe, la dérivée de ce critère au sens de Gâteaux est simple :

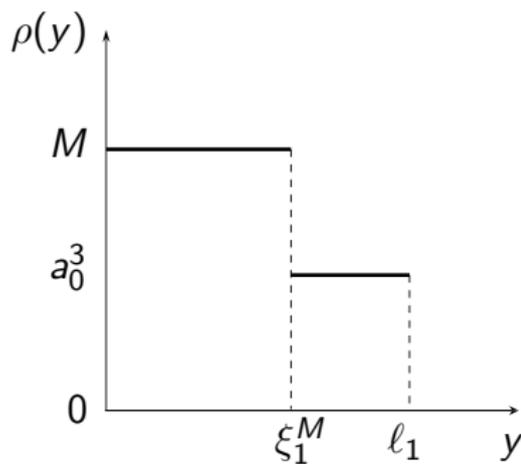
$$\left\langle \frac{dT_1}{d\rho}, h \right\rangle = \int_0^{\ell_1} h(y) w_0(y) f(y) dy$$

où f est une fonction dont le signe et les variations sont connus.

Ingrédients de la preuve (5)

Conditions d'optimalité

- Il est aisé d'établir l'existence de solutions pour le problème $\min\{T_1(\rho), \rho \in \mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1}^M\}$.
- Les calculs de variations précédents permettent d'établir que les optimums de ce problème sont *bang-bang*.



Ingrédients de la preuve (6)

Résolution complète du problème auxiliaire

- Parmi les fonctions *bang-bang*, on recherche celles qui minimisent T_1 .

⇒ Recherche de ξ_1^M : on évalue $\frac{dT_1}{d\xi_1^M}(\rho)$. (Calcul aisé, mais fastidieux)

⇒ On trouve $\xi_1^M = 0$ (i.e. $\rho \equiv a_0^3$).

- Retour à la minimisation de T .

⇒ On fait tendre M vers $+\infty$.

⇒ a_0^3 est encore solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1}^M := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1) \mid a_0^3 \leq \rho \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \leq S \right\} \end{array} \right\}.$$

Ingrédients de la preuve (7)

Conclusion

- Le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1}^M := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1) \mid a_0^3 \leq \rho \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \leq S \right\} \end{array} \right\}.$$

a pour solution $\rho \equiv a_0^3$.

- On peut revenir à la classe $\mathcal{A}_{a_0, S}$, car a_0^3 est l'image de a_0 par le changement de variable.
- Conclusion : a_0 est l'unique minimiseur de T dans $\mathcal{A}_{a_0, S}$.**

Atténuation Temporelle - Cas d'une fibre connectée à d'autres fibres

Théorème

Le problème $\min \lambda_1(a)$ dans la classe $\mathcal{A}_{a_0, S}$ n'a pas de solution.

On rappelle que $\lambda_1(a)$ est la 1^{ère} valeur propre **non nulle** du problème :

$$\begin{cases} -(a^2\phi')' = \lambda a\sqrt{1+a'^2}\phi \\ \phi'(0) = 0 \\ \phi'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Ingrédients de la preuve (1)

Changement de variable

Considérons à nouveau le changement de variable $y = \int_0^x \frac{dt}{a^2(t)}$.

On introduit les notations :

- $w(y) := \hat{v}(x, 0)$;
- $\rho(y) := a^3(x) \sqrt{1 + a'^2(x)}$.
- $\ell_1(a) := \int_0^\ell \frac{dt}{a^2(t)}$.

Le problème aux valeurs propres devient :

$$\begin{cases} -w'' = \lambda \rho w & y \in (0, \ell_1) \\ w'(0) = 0 \\ w'(\ell_1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ingrédients de la preuve (2)

Par l'absurde !

- L'image de la classe $\mathcal{A}_{a_0, S}$ par le changement de variable est incluse dans

$$\mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1} := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1) : \rho \geq a_0^3 \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \right\}.$$

- On raisonne par l'absurde.

Supposons que le problème $\min\{\lambda_1(a), a \in \mathcal{A}_{a_0, S}\}$ ait une solution a^* .

Ingrédients de la preuve (2)

Par l'absurde !

- L'image de la classe $\mathcal{A}_{a_0, S}$ par le changement de variable est incluse dans

$$\mathcal{R}_{a_0, S, \ell_1} := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1) : \rho \geq a_0^3 \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y) dy \right\}.$$

- On raisonne par l'absurde.

Supposons que le problème $\min\{\lambda_1(a), a \in \mathcal{A}_{a_0, S}\}$ ait une solution a^* .

- Alors, l'image de a^* par le changement de variable, notée ρ^* appartient à la classe :

$$\mathcal{R}^{M^*} := \left\{ \rho \in L^\infty(0, \ell_1^*) : a_0^3 \leq \rho \leq M^{*3} \text{ et } \int_0^{\ell_1^*} \rho(y) dy \right\}.$$

Ingrédients de la preuve (3)

Les grandes étapes

- On sait montrer que le problème $\min\{\lambda(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M^*}\}$ possède une solution, qui est **bang-bang**.
- **Idée :**
Montrer que l'on sait faire décroître le critère $\lambda(\rho)$ dans la classe $\mathcal{R}_{a_0, S}$, i.e. qu'il existe ρ' tel que $\lambda(\rho') < \lambda(\rho^*)_{a_0, S}$.
- Montrer l'existence d'un antécédent a' de ρ' dans la classe $\mathcal{A}_{a_0, S}$ par le changement de variable.
- On aura alors :

$$\lambda(a') < \lambda(\rho^*) = \lambda(a^*).$$

- C'est absurde !

Ingrédients de la preuve (4)

Décroissance de $\lambda(\rho)$

Lemme

Soit $\rho \in \mathcal{R}^{M^*}$ et h , une perturbation admissible. Alors :

$$\left\langle \frac{d\lambda}{d\rho}(\rho), h \right\rangle = -\lambda(\rho) \int_0^{\ell_1} h(y) w^2(y) dy.$$

- Monotonie de $\lambda(\rho)$ par rapport à M .

Si $M_1 < M_2$, on a :

$$\min\{\lambda(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1}\} > \min\{\lambda(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_2}\}.$$

- Monotonie de $\lambda(\rho)$ par rapport à ℓ_1 .

L'application $\ell_1 \mapsto \min\{\lambda(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M\}$, est **strictement décroissante**.

Ingrédients de la preuve (5)

Conclusion (1)

- On a : $0 < \ell_1(a) < \frac{\ell}{a_0^2}$ pour tout $a \in \mathcal{A}_{a_0, S}$.
- On sait démontrer que la solution du problème $\min\{\lambda(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M\}$ **sature la contrainte égalité** :

$$\int_0^{\ell_1} \rho(y) dy = S.$$

- On fait tendre simultanément $M \rightarrow +\infty$ et $\ell_1 \rightarrow \frac{\ell}{a_0^2}$.
- ρ converge au sens des mesures vers $a_0^3 + k \left(t\delta_0 + (1-t)\delta_{\ell/a_0^2} \right)$.

Ingrédients de la preuve (6)

Conclusion (2)

- On considère $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite minimisante convergeant au sens des mesures vers

$$\rho_\infty := a_0^3 + k \left(t\delta_0 + (1-t)\delta_{\ell/a_0^2} \right).$$

- Il est alors clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(\rho_n) < \lambda(\rho^*)$.
- ρ_∞ peut être vu comme l'antécédent de a_∞ tel que l'on puisse écrire :

$$\lambda(\rho_\infty) = \lambda(a_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(a_n), \text{ avec } a_n \in \mathcal{A}_{a_0, S}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ingrédients de la preuve (7)

Conclusion (3) : construction d'une suite minimisante

On choisit (a_n) telle que :

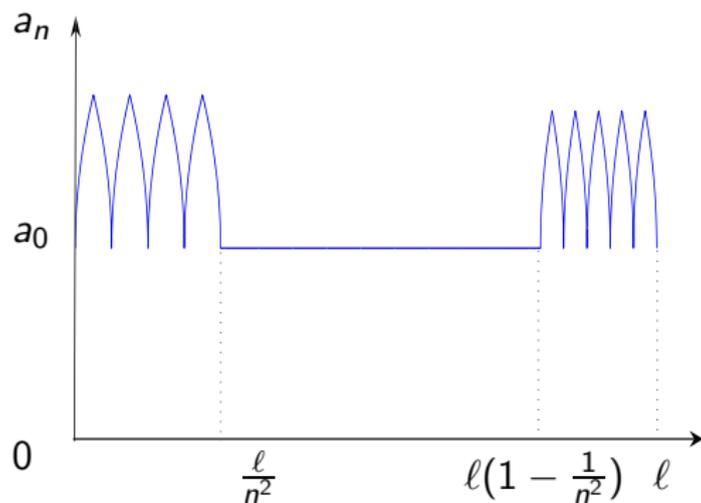
- $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} a_0$.
- $a_n \sqrt{1 + a_n'^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_0 + k(t\delta_0 + (1-t)\delta_\ell)$.
- $\int_0^\ell a_n \sqrt{1 + a_n'^2} dx = S$.

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(\rho_n) < \lambda(\rho^*) = \lambda(a^*).$$

C'est absurde !

Représentation d'une suite minimisante



Conclusion et perspectives (1)

Quelques questions relatives à la géométrie pulmonaire

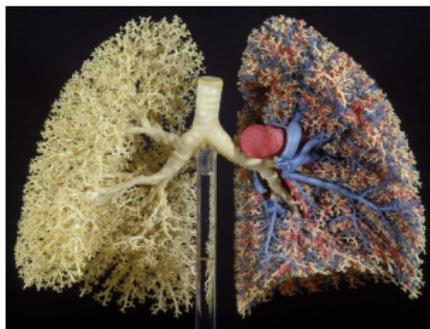


FIGURE: Moulage du poumon par Ewald R. Weibel

Conclusion et perspectives (2)

Le fluide (air) est régi par l'EDP de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + \boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

Conditions au bord

- 1 **À l'entrée** : on suppose connue la vitesse du fluide (**profil parabolique**).
- 2 **Sur la paroi latérale** : on impose une condition de non glissement (i.e. vitesse nulle sur le bord).
- 3 **À la sortie** : on impose une condition de **contrainte normale**.

Le critère et les deux directions envisagées

On étudie le critère :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx.$$

1 Une approche théorique.

Est-ce que le cylindre est une forme optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

2 Une approche numérique. (collaboration avec Benjamin Mauroy)

Quelle forme doit-on donner à une bifurcation (par exemple la trachée et les bronches souches) pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

Le critère et les deux directions envisagées

On étudie le critère :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 dx.$$

1 Une approche théorique.

Est-ce que le cylindre est une forme optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

2 Une approche numérique. (collaboration avec Benjamin Mauroy)

Quelle forme doit-on donner à une bifurcation (par exemple la trachée et les bronches souches) pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide ?

Perspectives (1)

- Le conduit cylindrique serait-il optimal pour d'autres données raisonnables en entrée et en sortie ?
- L'étude d'un autre critère peut sembler intéressante :

$$J_1(\Omega) := \int_S p(s) ds - \int_E p(s) ds \quad (\text{perte de charge})$$

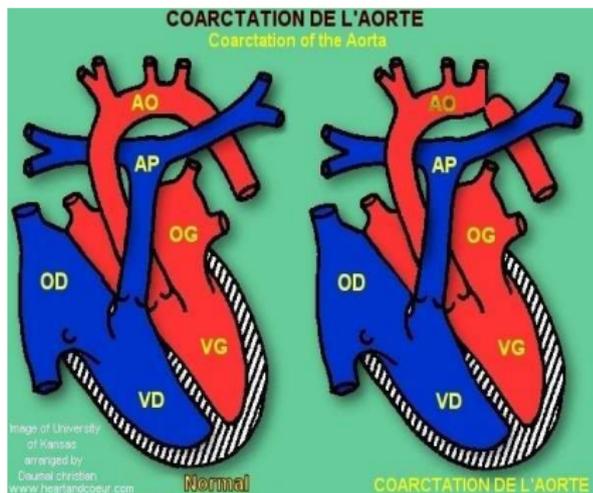
- Retrouve-t-on la forme de l'arbre bronchique si l'on minimise ce critère dans une classe raisonnable ?
- Également intéressant pour traiter des problèmes de design optimal (optimisation de la forme d'une pompe de fonds de puits).

Perspectives (2)

- $J_2(\Omega) := \int_{\partial\Omega} |\sigma(\mathbf{u}, p)|^2 dx$. (contraintes)

Application au problème de la coarctation de l'aorte.

⇒ Travail en cours avec Benjamin MAUROY.



Merci de votre attention