

C39181

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 3^{ème} année
GÉNIE MÉCANIQUE ET MÉCANIQUE
Session 2009

Épreuve de MÉCANIQUE ET AUTOMATIQUE

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail (circulaire n°99 018 du 1^{er} février 1999).

Nota. À partir d'un support commun, l'épreuve comporte deux parties totalement indépendantes :

- Mécanique générale ;
- Automatique (systèmes asservis linéaires).

Le sujet comporte 10 pages, 3 annexes dont 3 **documents-réponses à rendre avec votre copie.**

Le candidat devra traiter les deux parties. Ces deux parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

Il est conseillé au candidat de lire attentivement le sujet en entier et d'accorder un temps sensiblement égal pour chacune des deux parties.

Les deux parties traitées seront rédigées sur des copies séparées et il faudra préciser sur chaque copie :

- le titre ;
- le repère de l'épreuve ;
- la partie de l'épreuve traitée ;
- le nombre de feuilles constituant la copie.

Vous veillerez à rendre les documents réponses avec les copies correspondantes.

Dispositif de recharge d'une montre

Présentation

Les études proposées portent sur l'analyse d'un dispositif expérimental permettant d'évaluer le potentiel pratique des systèmes de récupération d'énergie pour l'alimentation d'une montre.

La partie motrice des mécanismes de récupération étudiés est un balancier, masselotte libre en rotation par rapport au carter de la montre. Son mouvement induit, après transformation, la rotation de l'axe d'un générateur de courant, par exemple.

Le dispositif expérimental envisagé est un banc 3 axes : 2 axes en structure cylindrique plus 1 axe pour la rotation du poignet.

Partie 1 : Mécanique

Le dispositif simplifié avec le balancier de la montre est représenté Figure 1.

- (0) est le bâti machine, de repère lié $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. \vec{z} est vertical ascendant. Le référentiel associé est supposé Galiléen
- (1) Bras du dispositif, en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec le bâti, de repère lié $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ paramétré par l'angle α motorisé
- (2) Avant bras du dispositif, en liaison glissière de direction \vec{z}_1 avec le bras (1). A est un point fixe de (2) tel que : $\overrightarrow{OA} = z \vec{z}_1$. z est variable et motorisé
- (3) Poignet et montre, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec l'avant bras, de repère lié $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$ paramétré par un angle β motorisé
- (4) Balancier interne à la montre, supposé en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_3) , de repère lié $R_4(B, \vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ paramétré par l'angle θ .

Les caractéristiques d'inertie sont les suivantes :

- (1) Moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{x}) : I_1 ; centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = l_1 \vec{z}_1$, l_1 supposé constant
- (2) Masse m_2 , centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = (z + l_2) \vec{z}_1$ avec l_2 constant ; moment d'inertie par rapport à (G_2, \vec{x}) : I_2
- (3) Masse m_3 , centre de gravité A , termes de la matrice d'inertie négligeable (ce solide est considéré comme ponctuel, en A)

- (4) Masse M , centre de gravité G tel que : $\overline{AG} = r \vec{x}_3 - e \vec{z}_4$; matrice d'inertie équivalente en B dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$:

$$I_{4,B} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

Les actions mécaniques considérées sont :

- Le poids sur toutes les pièces, associé à la gravité g .
- Un actionneur rotatif entre (0) et (1) exerçant un couple pur suivant \vec{x} d'intensité C_0 :

$$\{F_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ * C_0 \vec{x} \end{cases}$$

- Un actionneur linéaire entre (1) et (2) exerçant une force d'intensité F_1 : $\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} F_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}_A$
- Un actionneur rotatif entre (2) et (3) exerçant un couple pur d'intensité C_2 :

$$\{F_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ * C_2 \vec{z}_1 \end{cases}$$

- La génératrice exerce sur le balancier (4) un couple pur $\{F_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ * C_3 \vec{x}_3 \end{cases}$

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Nous recherchons les équations du mouvement du dispositif afin de dimensionner les actionneurs et pouvoir simuler le comportement du système de récupération d'énergie.

- Question 1. Réaliser le graphe de liaison du système complété des actions mécaniques.
- Question 2. Déterminer l'accélération de G_2 par rapport à (0), exprimée dans la base B_1 .
- Question 3. Déterminer le moment dynamique du solide (2) par rapport à (0), en O , en projection sur \vec{x} .
- Question 4. Déterminer le moment dynamique du solide (3) supposé ponctuel, par rapport à (0), en O , en projection sur \vec{x} .

On suppose que le solide (4) n'intervient pas dans le dimensionnement de l'actionneur C_0 .

- Question 5. Appliquer le principe fondamental en moment, afin de déterminer C_0 en fonction d'un mouvement souhaité et des actions extérieures. Vous préciserez les solides isolés et la projection réalisée.

Question 6. En supposant que z est constant, déterminer l'inertie équivalente I_{eq} du système pour l'actionneur de couple C_0 .

Question 7. Toujours en négligeant les effets du solide (4), déterminer l'équation du mouvement permettant de calculer F_1 . Vous préciserez le système isolé et l'équation écrite.

On recherche à présent pour le solide (4), l'équation de la dynamique, en moment, en B et en projection sur \vec{x}_3 .

Question 8. Exprimer la dérivée par rapport au temps et par rapport à B_0 du vecteur \vec{x}_3 . Le résultat sera exprimé dans la base B_3 .

On suppose dans la suite que β est constant.

Question 9. Calculer le produit matriciel $I_{4,B} \cdot \vec{x}_3$ puis l'expression de $\frac{d}{dt} \left((I_{4,B} \cdot \vec{\Omega}_{4/0}) \cdot \vec{x}_3 \right)$.

Question 10. Calculer l'expression $\left(I_{4,B} \cdot \vec{\Omega}_{4/0} \right) \cdot \frac{d\vec{x}_3}{dt} \Big|_0$.

Question 11. Après avoir isolé (4), déterminer le moment des actions extérieures sur le système isolé, en B , en projection sur \vec{x}_3 .

Question 12. Préciser les équations à utiliser pour déterminer l'équation du principe fondamental de la dynamique, en moment, en B , en projection sur \vec{x}_3 , pour le solide (4). Vous indiquerez comment les calculs précédents peuvent être utilisés, ce qu'il reste à calculer et comment vous le feriez.

Question 13. Déterminer l'équation du principe fondamental de la dynamique, en moment, en B , en projection sur \vec{x}_3 , pour le solide (4).

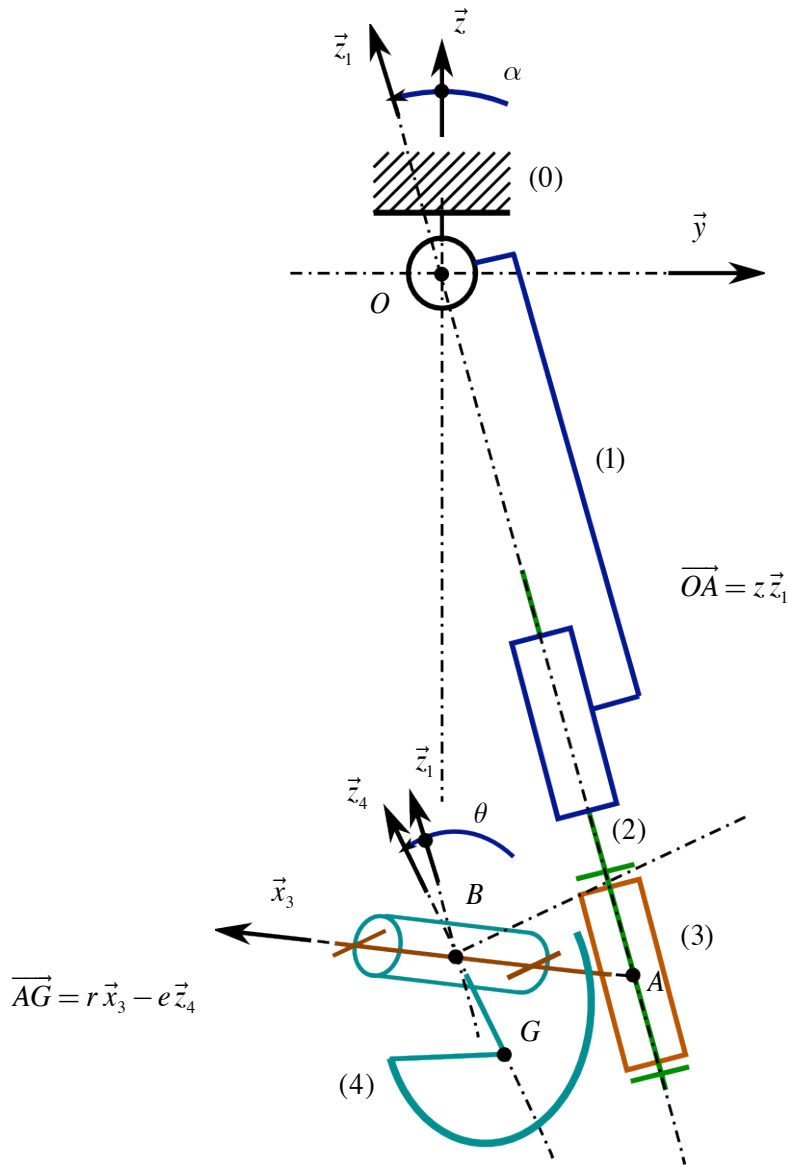


Figure 1 : Schéma cinématique du dispositif expérimental

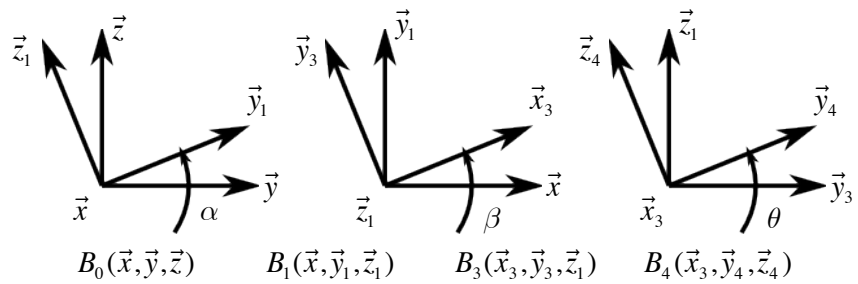


Figure 2 : Définition des bases

Partie 2 : Asservissement

Le problème posé dans cette partie est la performance du système de simulation de trajectoire du poignet étudié précédemment. On s'intéresse à l'asservissement de position du bras (1) par rapport au bâti (0). Le bras est mû par un moteur à courant continu à aimants permanents commandé en tension, couplé avec un réducteur de rapport $1/n$, $n = 100$.

Ce moteur est l'actionneur d'une chaîne d'asservissement dont l'entrée est une tension de commande et la sortie la position angulaire α du bras. Le schéma bloc du système est donné fig.1.

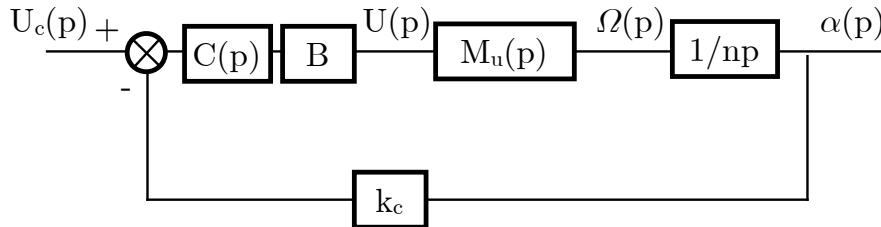


FIG. 1. Schéma-bloc du système asservi

2.1 Mise en équations du moteur à courant continu

On s'intéresse dans cette partie au comportement du moteur. Celui-ci est régi par les équations suivantes :

$$\text{équation électrique : } u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + e(t) \quad (1)$$

$$\text{équation de couple : } c(t) = k_m i(t) + c_r(t) \quad (2)$$

$$\text{équation de force électro-motrice : } e(t) = k_e \omega(t) \quad (3)$$

$$\text{équation dynamique : } c(t) = J \frac{d\omega}{dt} \quad (4)$$

dont les variables sont :

- $u(t)$ tension de commande (entrée)
- $i(t)$ intensité du courant traversant l'induit
- $e(t)$ force contre électro-motrice induite
- $c(t)$ couple moteur
- $c_r(t)$ couple résistant
- $\omega(t)$ vitesse de rotation de l'arbre moteur (sortie)

et dont les constantes sont :

- $R = 0,8 \Omega$ résistance de l'induit
- $L = 8.10^{-5} H$ inductance de l'induit
- $k_m = 0,1 N.m/A$ constante de couple
- $k_e = 0,1 V/(rad/s)$ constante de force électro-motrice
- $J = 1,2.10^{-4} kg.m^2$ moment d'inertie de l'ensemble en rotation (bras+réducteur) ramené sur l'arbre moteur
- $k_c = 1 V/rad$ gain du capteur de position angulaire

Question 1 : On suppose les conditions initiales nulles. Transformer les équations (1) à (4) dans le domaine de Laplace. Toutes les grandeurs seront notées avec des lettres majuscules ($U(p)$ est la transformée de Laplace de $u(t)$).

Question 2 : Mettre les équations ainsi obtenues sous forme d'un schéma bloc.

Question 3 : Donner les fonctions de transfert $M_u(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ et

$$M_c(p) = \frac{\Omega(p)}{C_r(p)}.$$

Question 4 : Mettre la fonction de transfert $M_u(p)$ sous la forme

$$M_u(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}. \text{ Commenter.}$$

Question 5 : Calculer la réponse temporelle du moteur à un échelon de tension $u(t) = U_0 h(t)$, le couple résistant étant modélisé par un échelon $c_r(t) = C_{r0} h(t)$.

Question 6 : En considérant une des constantes de temps très faible devant la seconde, proposer une approximation pour $M_u(p)$. Reprendre le calcul temporel de la réponse, et discuter la validité de l'approximation effectuée.

Question 7 : Tracer sur le même graphe les deux réponses $\omega(t)$. Souligner les différences.

Dans toute la suite, le moteur sera modélisé comme un système du premier ordre, de transmittance $M_u(p) = \frac{K_u}{1 + Tp}$ et $M_c(p) = \frac{K_c}{1 + Tp}$.

Question 8 : Identifier K_u , K_c et T .

2.2 Analyse en boucle ouverte

On s'intéresse maintenant au système asservi complet, d'entrée $u_c(t)$ et de sortie $\alpha(t)$, avec une perturbation $c_r(t)$ nulle. Le gain de l'amplificateur vaut $B = 10$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = 1$.

Question 9 : Tracer le diagramme de Bode de la transmittance en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ du système, en amplitude et en phase sur le document réponse fourni. Indiquer sur le graphique les marges de gain et de phase.

Question 10 : Calculer les marges de gain et de phase. Commenter la stabilité du système.

2.3 Analyse en boucle fermée

Question 11 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$, et la mettre sous forme canonique :

$$H_{BF}(p) = \frac{K}{1 + 2\xi p/\omega_0 + (p/\omega_0)^2}.$$

Question 12 : Donner le temps de réponse à 5% du système en vous aidant de l'abaque fournie en annexe (figure 4). Commenter la rapidité.

2.4 Asservissement avec correction tachymétrique

On ajoute à présent une boucle de retour en vitesse au système, en substituant au moteur le schéma-bloc suivant : Fig. 2

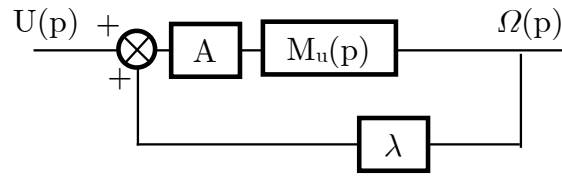


FIG. 2. boucle de retour en vitesse

Question 13 : Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte du bloc-moteur et la mettre sous forme canonique

$$\tilde{M}_u(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\tilde{K}}{1+\tilde{T}p}$$

Question 14 : Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée du système et la mettre sous forme canonique

$$H_{BF}(p) = \frac{K}{1+2\xi p/\omega_0+(p/\omega_0)^2}$$

Question 15 : Commenter les modifications par rapport à la boucle fermée sans correction. Comment améliorer la rapidité du système, tout en garantissant un dépassement nul pour une entrée en échelon de tension ? Déterminer λ .

Question 16 : Afin de préserver la stabilité du système ($|FTBO(p)| = 1$ lorsque $\phi = -135^\circ$), déterminer le gain A .

2.5 Effet de la perturbation en boucle fermée

La boucle fermée avec perturbation (c_r) peut être représentée ainsi :

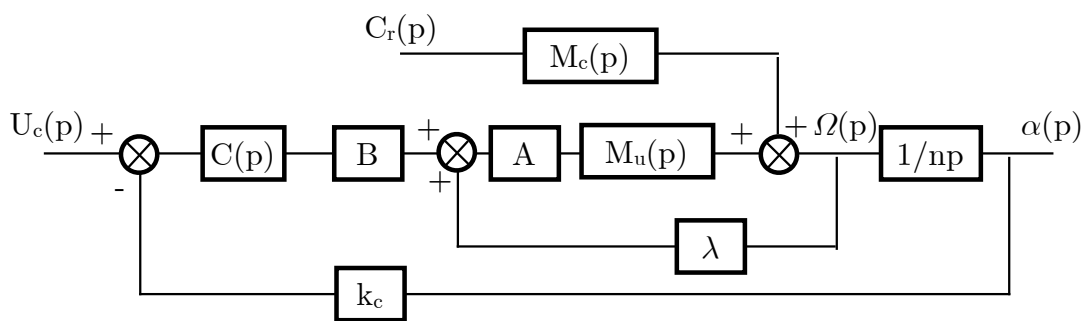


FIG. 3. perturbation en boucle fermée

Question 17 : En posant : $U_c(p) = 0$, calculer littéralement la fonction de transfert en boucle fermée : $\alpha(p)/C_r(p)$. Quel est son gain statique (calcul littéral, puis application numérique) ?

On va chercher à éliminer l'effet de la perturbation. Pour cela, on propose d'introduire le correcteur $C(p)$ suivant :

$$C(p) = -C \frac{(1 + T_c p)^2}{T'_c p (1 + \theta T_c p)}$$

Question 18 : Quel est le type de ce correcteur ? Expliquez.

On propose $T_c = \tilde{T}$, $T'_c = 10^{-4}$ et $\theta = \tilde{T}/100$

Question 19 : Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase associé au correcteur $C(p)$ sur le document réponse fourni.

Question 20 : Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO} = \frac{\alpha(p)}{U(p)}$

Question 21 : Quelle est la pulsation $\omega_{\phi M}$ qui réalise le maximum de phase pour $H_{BO}(p)$? Quelle est la phase atteinte ?

Question 22 : Proposer une valeur de C assurant la stabilité du système.

Question 23 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $G_{BF}(p) = \frac{\alpha(p)}{C_r(p)}$. Quel est son gain statique ? Commenter.

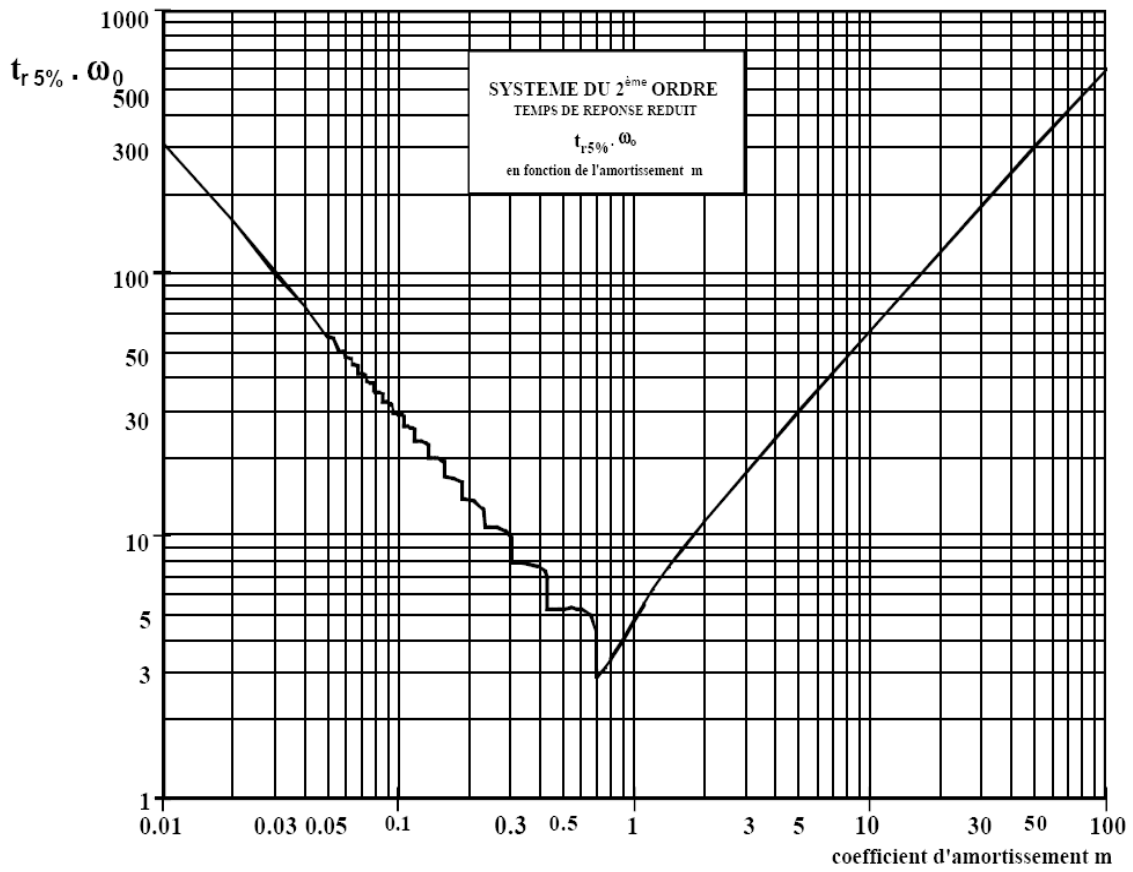


FIG. 4. temps de réponse réduit en fonction du coefficient d'amortissement