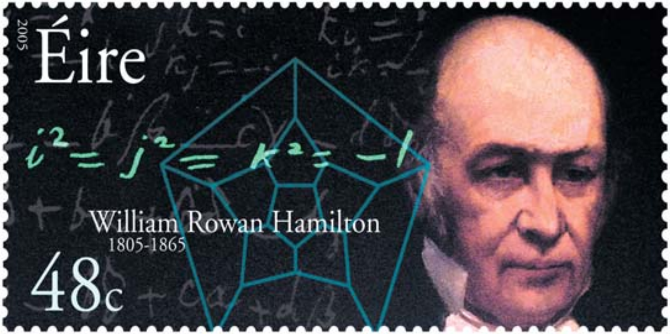
Évolutions hamiltoniennes en dimension finie et infinie

Patrick Gérard

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628

Formation à la recherche, ENS Cachan,
Ker Lann, 16 novembre 2009

1833 : La mécanique hamiltonienne



De Newton à Hamilton

Principe fondamental de la dynamique :

$$\dot{p} = F \ , \ p = mv = m\dot{q} \ , \ F = -\nabla V(q)$$

Hamiltonien :

$$H(q,p) := \frac{|p|^2}{2m} + V(q)$$

Les équations s'écrivent alors

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

De Newton à Hamilton

Principe fondamental de la dynamique :

$$\dot{p} = F \ , \ p = mv = m\dot{q} \ , \ F = -\nabla V(q)$$

Hamiltonien :

$$H(q,p) := \frac{|p|^2}{2m} + V(q)$$

Les équations s'écrivent alors

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

- Intérêt ? Mieux voir les symétries et les propriétés d'intégrabilité

Systèmes hamiltoniens en dimension finie

Soit

$$H : \Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

une fonction de classe C^∞. Le système hamiltonien associé à H est le système d'équations différentielles sur Ω :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Si $F = F(q, p)$ est une fonction sur Ω, son évolution est alors donnée par

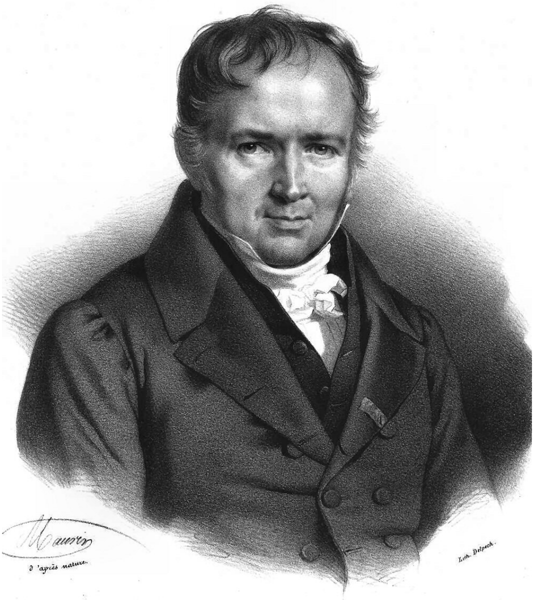
$$\frac{d}{dt} F(q(t), p(t)) = \{H, F\}(q(t), p(t))$$

avec

$$\{H, F\} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}$$

("crochet de Poisson" des fonctions H et F)

Siméon-Denis Poisson (1780–1840)



Intégrales premières

Une intégrale première du système hamiltonien associé à H est une fonction $F = F(q, p)$ conservée le long des courbes hamiltoniennes, c'est–à dire telle que

$$\{H, F\} = 0 \ .$$

Par exemple, H est toujours une intégrale première (conservation de l'énergie) car

$$\{H, H\} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

Les intégrales premières d'un système hamiltonien forment une algèbre de Poisson (le crochet de deux IP est une IP)

Transformations canoniques

Un difféomorphisme

$$\chi : \Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \Omega' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

est une transformation canonique, si, pour toutes fonctions f, g sur Ω',

$$\{f \circ \chi, g \circ \chi\} = \{f, g\} \circ \chi$$

De façon équivalente, si on pose

$$\chi(q,p) = (x(q,p), \xi(q,p)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

les fonctions $x_1, \cdots, x_d, \xi_1, \cdots, \xi_d$ vérifient

$$\{x_j, x_k\} = 0 \ , \ \{\xi_j, \xi_k\} = 0 \ , \ \{\xi_j, x_k\} = \delta_{jk} \ .$$

Systèmes hamiltoniens et transformations canoniques

Si $t \mapsto (q(t), p(t))$ est solution du système hamiltonien associé à H, et si χ est une transformation canonique, alors alors $t \mapsto \chi(q(t), p(t))$ est solution du système hamiltonien associé à $H \circ \chi^{-1}$.

Exemples de transformations canoniques

- Si $\Phi : q \mapsto \Phi(q)$ est une difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$, alors

$$x = \Phi(q) \ , \ \xi =^t D\Phi(q)^{-1}.p$$

est canonique

- Tout flot hamiltonien $\chi_t : (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$ est canonique.

Intégrabilité

Un système hamiltonien est dit (complètement) intégrable s'il existe une transformation canonique $\chi : (q,p) \mapsto (x,\xi)$ telle que

$$H \circ \chi^{-1}(x,\xi) = h(\xi)$$

Conséquence : le système s'écrit, dans les nouvelles variables,

$$\dot{x}_j = \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi)\ ,\ \dot{\xi}_j = 0\ .$$

et se résout donc facilement en

$$\xi_j(t) = \xi_j(0)\ ,\ x_j(t) = x_j(0) + t\frac{\partial h}{\partial \xi_j}(\xi(0))\ .$$

Remarque : les d fonctions $\xi_1, \cdots, \xi_d$ sont des intégrales premières en involution (i.e. $\{\xi_j, \xi_k\} = 0$) et dont les différentielles $d\xi_1, \cdots, d\xi_d$ sont indépendantes.

Joseph Liouville (1809-1885)

Le théorème de Liouville-Arnold

-Au voisinage de $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, un système hamiltonien est complètement intégrable si et seulement s'il admet d intégrales premières en involution et indépendantes.
-Si $F_1, \cdots, F_d$ sont d intégrales premières en involution dont les différentielles sont indépendantes sur une composante connexe compacte C d'un ensemble de niveau $\{(q,p) \in \Omega / F_k(q,p) = a_k\}$, alors il existe une transformation canonique

$$\chi : (q,p) \in U \mapsto (\varphi_1, \ldots, \varphi_d, I_1, \cdots, I_d) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \times \mathcal{I}$$

avec U ouvert de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ contenant C et $\mathcal{I}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, telle que

$$H \circ \chi^{-1}(\varphi, I) = h(I)$$

Évolution quasi–périodique sur des tores

Conséquence : au voisinage de la composante connexe compacte C, l'évolution n'est autre que l'enroulement d'une droite sur un tore :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\omega(I(0)) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \ , \ \omega_k(I) := \frac{\partial h}{\partial I_k} \ .$$

Les variables (I, φ) sont appelées variables action angle du système complètement intégrable.
On peut aussi introduire les variables de Birkhoff correspondantes

$$z_k := \sqrt{2I_k}\, \mathrm{e}^{-i\varphi_k}$$

La transformation $(\varphi, I) \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ est canonique et

$$H = h\left(\frac{|z_1|^2}{2}, \cdots, \frac{|z_d|^2}{2}\right) \quad , \quad i\dot{z}_k = \omega_k z_k$$

Exemples et contre-exemples

- Le problème à deux corps :

$$H(q,p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} \ , \ (q,p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3$$

- Mouvements d'un solide autour d'un point fixe (toupie de S. Kowalevski, 1888)
- Le problème à trois corps n'est pas intégrable (H. Poincaré, 1890-1899)

$$H(q,p) = \frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|p_2|^2}{2m_2} - \frac{1}{|q_1 - q_2|} \ , \ (q_j, p_j) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

- Une perturbation de système intégrable possède encore beaucoup de tores invariants (A. Kolmogorov-V. Arnold-J. Moser, 1954-1963)

Sophie Kowalevski, 1850-1891

Le cas des hamiltoniens quadratiques

Soit A une matrice hermitienne d'ordre d et soit

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(A(q+ip)|q+ip)$$

où $(z|z') := \sum_{j=1}^{d} z_j \overline{z}'_j$. Alors le système associé à H n'est autre que

$$i\dot{z} = Az \ , \ z := q + ip \ .$$

Diagonalisation par matrice unitaire

$$A = P \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)\, P^*$$

Au moyen de la transformation linéaire $w = P^* z$ (unitaire donc canonique !)

$$i\dot{w}_k = \lambda_k w_k$$

Variables action angle dans ce cas :

$$I_k = \frac{|w_k|^2}{2} \ , \varphi_k = -\arg(w_k) \ , \ H = \sum_k \lambda_k I_k$$

Formalisme de la mécanique quantique

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe.
Soit $A : D(A) \to \mathcal{H}$ un opérateur auto–adjoint :
- $D(A)$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{H}$
- A est linéaire
- $A = A^*$ au sens suivant : $\psi \in D(A)$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall \phi \in D(A) \ , \ (\psi | A\phi) = (\theta | \phi)$$

et on a alors $\theta = A\psi$.
Exemple

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \ , \ A\psi = -\Delta\psi + V\psi$$

$V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonction raisonnable...(T. Kato, 1954, ...)

Théorème de Stone

Sous ces hypothèses, pour tout $\psi_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique application $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ telle que $\psi(0) = \psi_0$ vérifiant

$$i\dot{\psi} = A\psi$$

au sens faible suivant : pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact,

$$\psi_f := \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\,dt \in D(A)$$

$$\text{et} \qquad i\psi_{f'} + A\psi_f = 0\ .$$

Dans le cas $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, $A\psi = -\Delta\psi + V\psi$, l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + V\psi$$

s'interprète au sens des distributions.

Théorème spectral

Il existe un espace mesuré (X, μ), une fonction $a : X \to \mathbb{R}$ mesurable et un isomorphisme unitaire

$$U : \mathcal{H} \to L^2(X, \mu; \mathbb{C})$$

tels que

$$U(A\psi) = aU\psi$$

Exemples

-Oscillateur harmonique :

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), A = -\partial_x^2 + x^2 \ : \ X = \mathbb{N} \ , \ U\psi = (\psi | h_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

h_n fonctions d'Hermite, $a(n) = 2n + 1$.

-Pas d'interaction :

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d), A = -\Delta \ : \ X = \mathbb{R}^d \ , \ U = \mathcal{F} \ , \ a(\xi) = |\xi|^2 \ .$$

Cadre général

Soit $H : D(H) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable :

$$dH(\psi).v = 2\mathrm{Re}(v|\overline{\partial}H(\psi)) \ , \ \psi \in D_2(H) \cdots$$

Le système hamiltonien associé à H est

$$i\dot{\psi} = 2\overline{\partial}H(\psi)$$

Résolution du problème de Cauchy ? Pas de théorème général satisfaisant !
Intégrabilité ? Plusieurs définitions existent, par exemple :
Il existe un espace mesuré (X, μ), une fonction $h : D(h) \subset L^2(X, \mu; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et une transformation canonique

$$\chi : \Omega \subset \mathcal{H} \to \Omega' \subset L^2(X, \mu; \mathbb{C})$$

tels que

$$H(\psi) = h(|\chi(\psi)|^2).$$

Exemple: L'équation de Schrödinger non linéaire

Un cas particulier important est

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)\ ,\ \ H(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}|\nabla\psi(x)|^2 + \frac{1}{4}|\psi(x)|^4\, dx$$

avec $D(H) = H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^4(\mathbb{R}^d)$, $D_2(H) = H^2(\mathbb{R}^d) \cap L^6(\mathbb{R}^d)$.

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + |\psi|^2\psi$$

Dans ce cas, le problème de Cauchy est bien posé sur $D(H)$ pour $d \in \{1, 2, 3\}$ (Ginibre-Velo, 1978) et même sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier pour $d = 1$.

De plus, si $d = 1$, on peut montrer que ce système est intégrable (Zakharov-Shabat, 1974 ...) Le cas des autres dimensions est totalement ouvert !

L'équation de Szegö cubique (PG-S.Grellier, 2009)

$$L^2(S^1) = \{\psi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(k)\mathrm{e}^{ik\theta} / \sum_k |\hat{\psi}(k)|^2 < \infty\}$$

$$\mathcal{H} := L^2_+(S^1) = \{\psi \in L^2(S^1)/\hat{\psi}(k) = 0 \ \forall k < 0\}$$

On définit $H : L^4(S^1) \cap L^2_+(S^1) \subset L^2_+(S^1) \to \mathbb{R}$ par

$$H(\psi) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\psi(\theta)|^4 \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

Système hamiltonien associé :

$$i\dot{\psi} = \Pi(|\psi|^2\psi) \ , \ \Pi : L^2(S^1) \to L^2_+(S^1)$$

Évolution bien définie pour $\psi \in H^{1/2}_+(S^1)$:

$$H^s_+(S^1) = \{\psi \in L^2_+(S^1)/\sum_k k^{2s}|\hat{\psi}(k)|^2 < \infty\}$$

Structure de paire de Lax

On peut reformuler l'évolution en termes d'opérateurs linéaires associés à ψ, définis comme suit :

$$H_\psi : v \in L^2_+ \mapsto \Pi(\psi \overline{v}) \in L^2_+ \text{ (Hankel)}$$

$$B_\psi : v \in L^2_+ \mapsto -i\Pi(|\psi|^2 v) + \frac{i}{2} H_\psi^2 v \in L^2_+$$

Alors ψ est solution si et seulement si

$$\frac{d}{dt} H_\psi = [B_\psi, H_\psi]$$

Conséquence : beaucoup d'intégrales premières ! En particulier

$$J_{2n}(\psi) = (H_\psi^{2n}(1)|1) \ , \ \{J_{2n}, J_{2p}\} = 0 \ \forall n, p$$

Sous-variétés de dimension finie invariantes

Kronecker (1881) : $\mathrm{rg}(H_\psi)$ est fini si et seulement si ψ est une fraction rationnelle en $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.
La classe de ces fonctions est donc invariante par l'évolution.
On peut montrer, grâce aux J_{2n} , que ces systèmes hamiltoniens sont intégrables en dehors d'un ensemble fermé de mesure nulle.
Exemple : $\mathrm{rg}(H_\psi) = 2\ ,\ 1 \in \mathrm{Im} H_\psi$:

$$\psi = \frac{az+b}{1-pz} \quad a \neq 0\ ,\ a+bp \neq 0\ ,\ |p| < 1$$

Système différentiel en $(a, b, p) \in \mathbb{C}^3$, dont on peut déterminer les variables action angle.

Dégénérescence des tores de Liouville

Considérons la solution $\psi^\varepsilon = \frac{a^\varepsilon z + b^\varepsilon}{1 - p^\varepsilon z}$ de donnée initiale :

$$\psi_0^\varepsilon(z) = z + \varepsilon \ .$$

Pour $\varepsilon = 0$, évolution paisible : $\psi^0(t, z) = z\, \mathrm{e}^{-it}$.
Pour $\varepsilon > 0$, le calcul explicite en variables action angle donne

$$|p^\varepsilon(t)|^2 = \frac{2}{4 + \varepsilon^2}(1 - \cos(\varepsilon\sqrt{4 + \varepsilon^2}\, t))$$

Conséquence : bien que $\forall s \ , \ \sup_\varepsilon \|\psi_0^\varepsilon\|_{H^s} < \infty$,
il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\forall s > \frac{1}{2} \ , \ \|\psi^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^s} \geq c_0 (t^\varepsilon)^{2s-1} \ , \ t^\varepsilon = \frac{\pi}{2\varepsilon} \ .$$

Exemple d'effet papillon ...