

# Le problème du voyageur du commerce

**Question 1** *Qu'est-ce qu'un problème NP-complet ?*

**Le problème du voyageur de commerce.** Nous considérons ici  $n$  points distincts numérotés de 1 à  $n$ . Nous supposons l'existence d'une fonction  $d$  qui donne la distance (un entier positif) entre deux points. Un *tour* est un chemin qui passe par tous les points sans visiter un point deux fois. La longueur du tour est la somme de toutes les distances. Le problème du voyageur de commerce est de trouver le tour le plus court.

**Question 2** *Donnez un algorithme (très) simple pour résoudre ce problème. Donnez sa complexité en temps et en espace.*

Pour donner un meilleur algorithme on peut considérer pour chaque sous-ensemble  $S \subseteq \{2, \dots, n\}$  et chaque point  $i$  la valeur  $opt(S, i)$  qui donne le meilleur chemin qui part du point 1, traverse tous les points de  $S \setminus \{i\}$  et s'arrête à  $i$ .

**Question 3** *Donnez un algorithme en utilisant  $opt(S, i)$ . Analysez sa complexité en temps et en espace.*

Nous supposons maintenant que les points sont dans le plan ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) et que  $d$  satisfait  $d(i, j) = d(j, i)$  et l'inégalité  $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$  pour des points  $i, j, k$  quelconques du plan.

**Question 4** *Montrez que dans le meilleur tour il n'y a pas de croisement.*

**Approximations.** On peut essayer de trouver des algorithmes qui trouvent un tour qui n'est pas forcément le plus court mais "presque". Un de ces algorithmes procède en commençant avec un point et en choisissant toujours le point le plus proche encore non-visité.

**Question 5** *Donnez un exemple avec 5 points où on ne trouve pas la meilleure solution comme cela.*

Un autre algorithme est basé sur l'arbre de recouvrement minimal. La valeur d'un arbre de recouvrement est la somme de tous ces liens.

**Question 6** *Montrez que la valeur de l'arbre de recouvrement minimal (ARM), du graphe complet construit à partir de tous les points donne une borne inférieure du plus court tour.*

**Question 7** *Donnez un algorithme qui à partir de l'ARM donne un tour. Montrez que ce tour est au plus 2 fois plus long que le plus court tour.*

Un autre algorithme est basé sur les tours "bitoniques". Pour simplifier nous supposons qu'il n'y a pas deux points avec la même  $x$ -coordonnée. Un tour bitonique est un tour qui commence au point le plus à gauche, va ensuite uniquement de gauche à droite jusqu'au point le plus à droite et retourne au point de départ en allant uniquement de droite à gauche.

**Question 8** *Donnez un algorithme qui donne le tour bitonique le plus court. Analysez sa complexité.*