

C1183

**Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson  
94230 CACHAN

---

Concours d'admission en 1<sup>ère</sup> année  
**DROIT, ÉCONOMIE ET GESTION**  
Session 2011

---

**Épreuve à Options**

---

Durée : **4 heures**

---

« *Aucun document n'est autorisé* »

L'usage de la calculatrice n'est autorisé que pour l'option **Maths Appliquées**.

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irrévocablement choisie** au moment de leur inscription.

Pour l'option **Maths Appliquées** : Deux feuilles (papier millimétré) en documents réponses.

## COMPOSITION DE DROIT COMMERCIAL

---

**Sujet** : Comparez la société unipersonnelle et l'E.I.R.L.

## COMPOSITION DE DROIT PUBLIC

---

Sujet : Le contrôle de la loi sous la cinquième République

# Mathématiques Appliquées et Statistiques

---

## Consignes :

- L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
- Deux feuilles (papier millimétré) en documents réponses.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.

## Exercice 1 (Une agence de voyage)

Le directeur d'une agence de voyage implantée depuis dix ans veut étudier son activité à l'aide d'outils statistiques.

1. Il rassemble les données suivantes concernant l'évolution de son activité :

Année	rang de l'année $x_i$	Nombre $y_i$ de voyages vendus
2001	1	39
2002	2	215
2003	3	280
2004	4	320
2005	5	340
2006	6	361
2007	7	389
2008	8	402
2009	9	402
2010	10	425

L'ensemble des résultats seront donnés à  $10^{-2}$  près.

- (a) Représenter le nuage de points associé à la série  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 10}$  dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 2 cm pour 50 voyages.
- (b) Calculer la moyenne et la variance.
- (c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié?
- (d) On effectue le changement de variable :

$$\forall i = 1, \dots, 10, z_i = \exp\left(\frac{y_i}{100}\right)$$

Présenter dans un tableau la nouvelle série  $(x_i; z_i)$ .

- (e) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x_i, z_i)$ . Un ajustement affine est-il justifié?
  - (f) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés.
  - (g) En déduire une expression de  $y$  en fonction de  $x$ .
  - (h) En déduire enfin une prévision pour 2011.
2. Le directeur rassemble les données suivantes concernant les destinations choisies.

Destination	Nombre de voyages en 2010
Maroc	86
Galice	23
Andalousie	95
Catalogne	62
Madrid	81
Castille	25

- (a) Quel(s) indicateur(s) statistique(s) pouvez-vous donner sur ce type de série ?  
 (b) Le directeur complète le tableau de la manière suivante :

Destination	Nombre de voyages en 2010	Prix moyen du voyage en euros et par personne
Maroc	86	620
Galice	23	560
Andalousie	95	730
Catalogne	62	680
Madrid	81	700
Castille	25	620

Calculer le prix moyen d'un voyage en 2010 dans cette agence.

- (c) Concernant le prix d'un voyage en 2010, pourriez-vous donner d'autres indicateurs de position ou de dispersion au directeur ?
3. Le directeur s'intéresse aussi à la durée des voyages effectués en 2010.

Durée du voyage en jours	[1; 6[	[6; 8[	[8; 13[	[13; 14[	[14; 21]
Nombre de voyages de cette durée	41	178	15	108	30

- (a) Quel est le type de cette série statistique ?  
 (b) Tracer son histogramme.  
 (c) Quelle est la classe modale de cette série ?

### Exercice 2 (Tirages dans une urne)

Une urne contient 9 boules : 4 rouges, 3 blanches et 2 noires.

- On tire successivement et avec remise 12 boules.
  - On note  $X$  le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de  $X$  ? Calculer son espérance et sa variance.
  - On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge si une boule rouge apparaît et valant 0 sinon.
    - Quelles sont les valeurs prises par  $Y$  ?
    - Que signifie l'événement  $(Y = 0)$ . En calculer la probabilité.
    - Calculer  $P(Y = 5)$ .
- On tire 3 boules dans l'urne.
  - Dans cette question, on tire ces 3 boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage tricolore ?
  - Dans cette question, on tire ces 3 boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage bicolore ?

### Exercice 3 (Tirages dans 3 urnes)

Soient 3 urnes :  $U_1$  (contenant 1 boule blanche et 1 boule noire),  $U_2$  (contenant 2 boules blanches) et  $U_3$  (contenant 2 boules noires).

On effectue un premier tirage d'une boule dans  $U_1$ .

Si la boule tirée est noire, on ajoute une boule noire dans  $U_2$ , sinon on ajoute une boule blanche dans  $U_3$ .

Ensuite on tire une boule dans  $U_2$  puis une dans  $U_3$ .

- Calculer la probabilité que les trois tirages donnent trois boules blanches.
- On sait que le tirage dans l'urne  $U_2$  a donné une blanche. Quelle est alors la probabilité d'avoir eu une boule noire dans l'urne  $U_1$ .

#### Exercice 4 (Etude de fonction)

On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm.

#### Partie A : Etude d'une fonction $g$ auxiliaire.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) = x^3 - x + 3 - 2 \ln x$$

1. Soit  $P$  la fonction polynôme définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = 3x^3 - x - 2$ . Ecrire  $P(x)$  sous la forme d'un produit de  $x - 1$  par un polynôme  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  que l'on déterminera.
2. Déterminer alors le signe de  $P(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Vérifier que la fonction dérivée  $g'$  peut s'écrire

$$\forall x \in ]0, +\infty[, g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

4. En déduire les variations de  $g$  sur son domaine d'étude.
5. Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) > 0$ .

#### Partie B : Etude de la fonction $f$ .

1. Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de  $f$  ?
2. (a) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
(b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
(c) Montrer que sur  $[1, +\infty[$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de la droite  $(\Delta)$ .
3. Vérifier que la fonction dérivée  $f'$  peut s'écrire

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

4. En déduire les variations de  $f$ .
5. Tracer la droite  $(\Delta)$  et donner l'allure de  $\mathcal{C}_f$ . On donne  $f(0,5) = -3,3$  et  $f(3) = 4,3$ .
6. On considère la fonction  $H$  :

$$H : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-1}{x} \ln(x)$$

- (a) Déterminer la dérivée de  $H$ .
- (b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- (c) Calculer  $\int_1^e f(x) dx$ . En déduire l'aire en  $\text{cm}^2$  de la surface délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .

**Exercice 5 (Poids d'un individu)**

Le poids d'un individu pris dans une certaine population est distribué normalement, autrement dit suivant une loi de Laplace-Gauss. Le poids moyen est de 70 kg et l'écart type est de 5.

1. Calculer la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ait un poids supérieur à 75 kg.
2. Quel est le pourcentage des individus ayant un poids compris entre 63 kg et 75 kg?
3. On constate que parmi les individus de la population atteints d'une certaine maladie, 2,3% avaient un poids supérieur à 80 kg. Peut-on penser que le poids est un des facteurs de cause de cette maladie?

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE STANDARD

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
Φ(z)	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995