2C4122

Ecole Normale Supérieure de Cachan

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2014

Epreuve de Mathématiques 2

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet 1- Probabilités et statistiques

Sujet 2- Analyse numérique

Le candidat traitera au choix le sujet 1 ou le sujet 2 et rappellera sur sa copie le sujet qu'il a choisi de traiter.

Sujet 1 - Probabilités et Statistiques

Préliminaire

Le but de ce problème est de montrer certains résultats en théorie de la ruine, théorie utilisée notamment pour des applications à l'étude de la solvabilité d'une compagnie d'assurance. On considère la suite de variables aléatoires réelles $(C_n(u,p))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n > 0$:

$$C_n(u,p) = u + pn - \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

et $C_0(u,p) = u$. Dans cette relation, $u > 0$ est une fortune initiale (déterministe), $p > 0$ est une quantité (déterministe) de primes reçues par la compagnie d'assurance entre deux dates, et S_i correspond aux montants (aléatoires) des règlements de sinistres effectués entre la date $i-1$ et la date i. $C_n(u,p)$ représente alors la fortune disponible à la date n. Le but de ce problème consiste à évaluer le mieux possible la probabilité de ruine, i.e.

$$\pi(u,p) = \mathbb{P}\left(\exists n \geq 0 : C_n(u,p) < 0\right),$$

en fonction de différentes hypothèses sur u, p, et les $(S_i)_{i\geq 1}$.

Dans toute la suite de ce problème, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{F}$ désigne une tribu sur l'ensemble Ω, et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$. De plus, E et Var désignent respectivement la moyenne et la variance pour la probabilité $\mathbb{P}$.

Rappels

Lois de Poisson et exponentielle : Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire Z_1 suit une loi de Poisson si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Une variable aléatoire Z_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ si, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z_2 \in A) = \int_A \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x.$$

Filtrations : On rappelle qu'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}.$$

Martingales : Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale si, par définition, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable,

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ E[|X_n|] < \infty$,

iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$,

où $E[X|\mathcal{B}]$ désigne l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire réelle et intégrable X par rapport à $\mathcal{B}$, sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Temps d'arrêt :

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On appelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$temps d'arrêt une variable aléatoire T telle que

i) T prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ presque sûrement,

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Convergence en loi :

On rappelle qu'une suite de vecteurs aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ converge en loi vers un vecteur aléatoire Z si, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que f soit continue et bornée,

$$E[f(Z_n)] \to_{n\to\infty} E[f(Z)].$$

1 Utilisation de la théorie des martingales

Dans cette partie, on utilise la théorie des martingales pour obtenir une majoration de la probabilité de ruine dans le cas où les S_i sont indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) et de même loi qu'une variable aléatoire $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ (avec la convention $\sum_{j=1}^{N} X_j = 0$ lorsque $N = 0$). Dans le cadre de la modélisation du capital d'une compagnie d'assurance, N est un nombre aléatoire de sinistres se produisant dans une période de temps, et X_j est le coût aléatoire du $j-$ème sinistre. On suppose que les $(X_j)_{j\geq 1}$ sont des variables aléatoires réelles presque sûrement positives.

1.1 Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale, et soit T un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$temps d'arrêt. On suppose que $T \leq \tau$ p.s. où τ est un réel. Montrer que

$$E[M_T] = E[M_0].$$

Indication: On pourra utiliser l'identité $M_T = M_0 + \sum_{i=1}^{\tau}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_{\{T\geq i\}}$.

1.2 On suppose de plus que, pour tout $n \geq 0$, $M_n \geq 0$ p.s. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $A_m(x) = \{\sup_{0\leq k\leq m} M_k > x\}$, et

$$T_m(x) = \min\{k : 0 \leq k \leq m, M_k > x\}\mathbf{1}_{A_m(x)} + m\mathbf{1}_{A_m^c(x)},$$

où A^c désigne le complémentaire d'un ensemble A. Montrer que $T_m(x)$ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$temps d'arrêt.

1.3 Sous les hypothèses de la question 1.2, montrer que $x\mathbb{P}(A_m(x)) \leq E[M_0]$.

1.4 Dans la suite de cette partie, N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. indépendantes de la variable aléatoire N. Montrer que $\mathbb{P}(S < +\infty) = 1$.

1.5 On suppose que $\mu_1 = E[X_1] < \infty$. Déterminer $E[S]$.

1.6 On suppose que $\mu_2 = E[X_1^2] < \infty$. Déterminer $Var(S)$.

1.7 Dans la suite de cette partie, on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\phi(a) = E[\exp(aX_1)] < \infty$. Calculer

$$\psi(a) = E[\exp(aS)].$$

1.8 On considère des variables aléatoires $(S_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de même loi que S. Déterminer $s(a)$ pour que la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} M_0 &= 1, \\ M_n &= \exp\left(a\sum_{i=1}^{n} S_i - ns(a)\right) \text{ si } n > 0, \end{aligned}$$

soit une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale, où $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n > 0$, $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $\{S_1, ..., S_n\}$.

1.9 Soit $x > 0$. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(\sup_{1\leq k\leq m}\{\sum_{i=1}^{k} S_i - ks(a)/a\} > x)$.

1.10 Expliciter $s(a)$ dans le cas où les X_i sont des variables exponentielles de paramètre $\mu > 0$ (i.e. d'espérance $1/\mu$), en précisant l'ensemble de définition.

1.11 En déduire, toujours dans le cas où les X_i sont des variables exponentielles de paramètre $\mu > 0$, une borne supérieure pour p_0 défini par $p_0 = \inf(p : \pi(1, p) \leq \exp(-a))$, en supposant $\mu > a$.

2 Borne de Lundberg

Dans toute cette partie, les S_i sont i.i.d. de même loi que

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

(avec la convention $\sum_{j=1}^{N} X_j = 0$ lorsque $N = 0$), où les $(X_j)_{j\geq 1}$ sont des variables aléatoires positives i.i.d. indépendantes de N. On suppose également que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E[X_1], \text{ supposé non nul}, \\ \phi(r) &= E[\exp(rX_1)], \text{ éventuellement infini}, \\ \mathcal{R} &= \{r \in \mathbb{R} : \phi(r) < \infty\}. \end{aligned}$$

Soit R la plus grande solution positive appartenant à $\mathcal{R}$ de l'équation d'inconnue r suivante :

$$1 + \frac{p}{\lambda} r = \phi(r). \tag{1}$$

2.1 Soit X_1 une variable aléatoire telle que $\mathcal{R} =]-\infty; r_0[$, avec $r_0 > 0$. Montrer que $R = 0$ si $p \leq \lambda\mu_1$.

2.2 On suppose que sur $[0, r_0]$ avec $r_0 > 0$, ϕ est définie et de plus $E[X_1^2 \exp(r_0 X_1)] < \infty$. Montrer que ϕ est strictement convexe sur $[0, r_0]$.

2.3 En déduire que, sous les hypothèses de la question précédente, l'équation (1) admet au plus une solution sur $]0, r_0]$.

2.4 On suppose à présent que, pour $r_1 > 0$ et pour tout $r_0 < r_1$, $E[X_1^2 \exp(r_0 X_1)] < \infty$, et $E[\exp(r_1 X_1)] = \infty$. Montrer que, si $p > \lambda\mu_1$, l'équation (1) admet une unique solution strictement positive.

2.5 Déterminer R dans le cas où X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (i.e. d'espérance $1/\mu$), en fonction de p, λ et μ.

2.6 On considère à présent une variable aléatoire X_1 pour laquelle $R > 0$. Soit

$$\pi_k(u, p) = \mathbb{P}(\exists i \in \{1, ..., k\} : \ C_i(u, p) < 0).$$

Déterminer, pour $k > 0$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\exists i \in \{1, \cdots, k\} \ : \ C_i(u, p) < 0 | S_1 = t)$$

en fonction de $\pi_{k-1}(u', p)$, pour un certain u' que l'on précisera.

2.7 En déduire une démonstration par récurrence du fait que $\pi_k(u, p) \leq \exp(-Ru)$ pour tout $k \geq 1$, puis une majoration de $\pi(u, p)$.

3 Estimation des paramètres

On considère S tel que défini dans la section précédente. On suppose dans toute cette partie que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ avec $p > \lambda/\mu$. On rappelle que p est fixé.

Dans cette partie, $(S_1, N_1), (S_2, N_2), \cdots$ sont des vecteurs aléatoires i.i.d. de même loi que (S, N).

3.1 *On suppose dans un premier temps et jusqu'à la question 3.5 incluse que la valeur du paramètre λ est connue.* A partir de l'expression de $E[S]$, construire un estimateur $\hat{\mu}_n$ de μ, i.e. une fonction borélienne de $(S_1, \cdots, S_n)$, qui converge presque sûrement vers μ lorsque $n \to \infty$.

3.2 Montrer que si une suite de vecteurs aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une constante a, alors elle converge en probabilité vers a.

3.3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert contenant α. On note $\varphi'(\alpha)$ le vecteur ligne $\varphi'(\alpha) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\alpha), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\alpha))$ et on considère une suite de vecteurs aléatoires (colonnes) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $(n^{1/2}(Z_n - \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire Z. Montrer que $(n^{1/2}(\varphi(Z_n) - \varphi(\alpha)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\varphi'(\alpha)Z$.

Indication: on pourra utiliser le lemme de Slutsky pour des variables aléatoires réelles, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers A, et si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en loi vers des constantes b et c, alors $(A_nB_n + C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $Ab + c$.

3.4 Calculer la loi limite de $(n^{1/2}(\hat{\mu}_n - \mu))_{n\geq 1}$.

3.5 Construire un estimateur $\hat{R}_n$ du coefficient R, i.e. une fonction borélienne de $(S_1, \cdots, S_n)$, tel que $\hat{R}_n \to R$ p.s. lorsque $n \to \infty$. Quelle est la loi limite de $(n^{1/2}(\hat{R}_n - R))_{n\geq 1}$?

3.6 *On suppose dans la suite de cette partie que λ n'est pas connu.* Construire un estimateur $\hat{\lambda}_n$ de λ, défini comme une fonction borélienne de $(N_{n+1}, \cdots, N_{2n})$, qui converge presque sûrement vers λ lorsque $n \to \infty$. Quelle est la loi limite de $(n^{1/2}(\hat{\lambda}_n - \lambda))_{n\geq 1}$?

3.7 A partir des expressions de $E[S]$ et $\hat{\lambda}_n$, construire un estimateur de $\tilde{\mu}_n$ de μ, défini comme une fonction borélienne de $(S_1, \cdots, S_n, N_{n+1}, \cdots, N_{2n})$, qui converge presque sûrement vers μ lorsque $n \to \infty$. Calculer la loi limite de $(n^{1/2}(\tilde{\mu}_n - \mu))_{n\geq 1}$.

4 Une expression de la probabilité de ruine

Le but de cette partie est de déterminer une expression satisfaite par la probabilité de ruine, et d'en déduire quelques propriétés simples sur celles-ci. On reprend les hypothèses et notations de la partie 3, avec $p > \lambda/\mu$.

4.1 Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\mathbb{P}(C_n(u,p) \leq c_n) \to_{n\to\infty} 0$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4.2 Soit $T = \inf\{n \geq 0 : C_n(u,p) < 0\}$, avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Montrer que, lorsque $n \to \infty$, $E[\exp(-RC_n(u,p))|T > n]\mathbb{P}(T > n)$ tend vers 0.

Indication : on pourra commencer par écrire

$$\begin{aligned} E[\exp(-RC_n(u,p))|T > n] &= E[\exp(-RC_n(u,p))\mathbf{1}_{\{C_n(u,p)\leq c_n\}}|T > n] \\ &\quad + E[\exp(-RC_n(u,p))\mathbf{1}_{\{C_n(u,p)> c_n\}}|T > n]. \end{aligned}$$

4.3 Montrer que, pour $k < n$, $E[\exp(-RC_n(u,p))|T = k] = E[\exp(-RC_T(u,p))|T = k]$.

4.4 On suppose que $\mathbb{P}(T < +\infty) > 0$. En utilisant l'identité

$$E\left[\exp(-RC_n(u,p))\right] = E[\exp(-RC_n(u,p))|T \leq n]\mathbb{P}(T \leq n) + E[\exp(-RC_n(u,p))|T > n]\mathbb{P}(T > n),$$

justifier que

$$\pi(u,p) = \frac{\exp(-Ru)}{E[\exp(-RC_T(u,p))|T < \infty]}.$$

4.5 En déduire une autre preuve de la borne de Lundberg obtenue à la question 2.7.

4.6 On suppose que $E[S_1] > p$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $S_1 \leq \alpha$ p.s. Montrer que $\mathbb{P}(T < +\infty) > 0$ et que $E[\exp(-RC_T(u,p))|T < \infty] < \infty$. En déduire également que $\pi(u,p) \to 1$ quand R tend vers 0.

5 Distribution du capital à la ruine

Dans cette partie, $S_1, S_2, \cdots$ sont des variables aléatoires i.i.d., $T_p(u) = \inf\{n \geq 0 : C_n(u,p) < 0\}$, où $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ et, pour $y > 0$:

$$H(u,y) = \mathbb{P}(C_{T_p(u)}(u,p) \leq -y, T_p(u) < \infty).$$

Le but de cette partie est de déterminer une équation satisfaite par cette fonction H. La connaissance de cette fonction permettant, in fine, de calculer le dénominateur présent dans la question 4.4.

On considère le cas où $\mathbb{P}(S_1 = 0) = \exp(-\lambda)$ pour un paramètre $\lambda > 0$, et on désigne par $L(t)$ la fonction de survie de la loi conditionnelle de S_1 sachant $S_1 > 0$, i.e. pour tout $t \geq 0$:

$$L(t) = \mathbb{P}(S_1 > t | S_1 > 0).$$

La fonction L est supposée dérivable, et sa dérivée est notée $-l$.

5.1 On suppose pour cette question seulement que la fortune initiale u est strictement négative. Déterminer $H(u,y)$ pour $y > 0$.

5.2 Dans la suite, $u > 0$ et $y > 0$. Etablir la relation

$$\mathbb{P}(C_{T_p(u)}(u,p) \leq -y, T_p(u) = 1) = L(u+p+y)(1-e^{-\lambda}).$$

5.3 Montrer que

$$\mathbb{P}(C_{T_p(u)}(u,p) \leq -y, S_1 = 0, T_p(u) < \infty) = H(u+p,p)e^{-\lambda}.$$

5.4 Prouver que

$$\mathbb{P}(C_{T_p(u)}(u,p) \leq -y, S_1 > 0, 1 < T_p(u) < \infty) = \int_0^x f(t)l(t)dt,$$

où on explicitera x et la valeur de f en fonction de H. En déduire que H est solution d'une équation du type

$$H(u,y) = g_{p,\lambda}(H,u,y),$$

où l'on précisera la fonction $g_{p,\lambda}$.

Fin du sujet 1

Sujet 2 Analyse Numérique

Les différentes parties du sujet sont indépendantes

Dans le sujet, d est un entier naturel non nul et p, q des vecteurs de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{C}_b^k$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont bornées. On désigne par $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}_b^k, k \geq 2$. On définit également la matrice

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

où 0 et Id désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $M_d(\mathbb{R})$. On a $\mathbb{J}^{-1} = -\mathbb{J}$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Un système différentiel est dit hamiltonien s'il est de la forme

$$(1) \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p), \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p), \quad j = 1, \ldots, d.$$

En introduisant $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d}$, le système (1) admet une écriture plus compacte : $\dot{x} = J\nabla H(x)$. Enfin, pour une fonction $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{2d}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on notera $\nabla_{q,p}\Phi$ la matrice jacobienne

$$(\nabla_{q,p}\Phi)_{i,j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}, \; j = 1, \cdots, d, \quad (\nabla_{q,p}\Phi)_{i,j+d} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_j}, \; j = 1, \cdots, d, \quad i = 1, \cdots, 2d.$$

L'objet de ce sujet est d'étudier d'une part les propriétés mathématiques des solutions de systèmes différentiels hamiltoniens et d'autre part une classe de schémas numériques adaptés. Pour l'étude des schémas, on introduit les notations suivantes : on notera $\delta t > 0$ le pas de discrétisation en temps et q_j^n, p_j^n les valeurs approchées de $(q_j(n\delta t), p_j(n\delta t))$ où (q_j, p_j) est une solution exacte de (1). Ainsi, le schéma d'Euler explicite pour (1) s'écrira :

$$q_j^{n+1} = q_j^n + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^n, p^n), \quad p_j^{n+1} = p_j^n - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_j}(q^n, p^n).$$

On introduit aussi le schéma d'Euler implicite :

$$q_j^{n+1} = q_j^n + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^{n+1}, p^{n+1}), \quad p_j^{n+1} = p_j^n - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_j}(q^{n+1}, p^{n+1}).$$

On rappelle la notion de consistance d'un schéma numérique. Etant donné $x : [0, T[\to \mathbb{R}^{2d}$ une solution de $\dot{x} = J\nabla H(x)$ et $x^{n+1} = x^n + \delta t \Psi(x^n, x^{n+1}, \delta t)$ (où $\Psi : \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^{2d}$) un schéma numérique associé à ce système. L'erreur de consistance e est définie par

$$e(t) = \left\| \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} - \Psi(x(t), x(t+\delta t), \delta t) \right\|, \quad t \in [0, T - \delta t[.$$

Un schéma est consistant d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si $e(t) = O(\delta t^k)$.

Partie I : l'exemple du pendule linéaire

1. Soit $\omega > 0$. Considérons l'équation du pendule linéaire :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (E)$$

   a) Montrer que toutes les solutions de (E) sont périodiques (on donnera une base de solutions de (E)).
   b) Soient $(x_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que (E) possède une solution unique et globale telle que $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.
   c) Trouver $H_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel qu'on puisse écrire (E) sous la forme d'un système différentiel hamiltonien. Montrer que

$$H_e(x(t), v(t)) = H_e(x_0, v_0), \quad (P_0)$$

   pour tout $t \geq 0$ et où $v(t) = \dot{x}(t)$.

2. On étudie le comportement des schémas d'Euler explicite et implicite vis à vis de la propriété (P_0). On notera (x^n, v^n) les valeurs approchées de $x(n\delta t)$ et $v(n\delta t)$.
   a) Écrire le schéma d'Euler explicite pour (E). Montrer qu'il existe $r(\delta t) > 1$ tel que $H_e(x^{n+1}, v^{n+1}) = r(\delta t)\, H_e(x^n, v^n)$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \|(x^n, v^n)\| = +\infty$.
   b) Écrire le schéma d'Euler implicite pour (E). Montrer qu'il existe $s(\delta t) < 1$ tel que $H_e(x^{n+1}, v^{n+1}) = s(\delta t)\, H_e(x^n, v^n)$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \|(x^n, v^n)\| = 0$.

   Dans les deux cas, les schémas numériques considérés ne reproduisent pas correctement le comportement qualitatif des solutions exactes de (E) : en particulier la propriété (P_0) n'est pas vérifiée. Dans ce qui suit, nous allons considérer deux schémas qui préservent H_e.

3. Dans cette question, on supposera que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 3$. Considérons le schéma suivant, associé à la simulation numérique de (1) :

$$(2) \qquad \begin{aligned} q_j^{n+1} &= q_j^n + \frac{\delta t}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}(q^n, p^n) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^{n+1}, p^{n+1})\right), \\ p_j^{n+1} &= p_j^n - \frac{\delta t}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}(q^n, p^n) + \frac{\partial H}{\partial q_j}(q^{n+1}, p^{n+1})\right). \end{aligned}$$

a) Montrer que pour un système hamiltonien général, c'est un schéma d'ordre au moins égal à 2.

b) Écrire le schéma (2) pour l'équation (E) et montrer que

$$H_e(x^{n+1}, v^{n+1}) = H_e(x^n, v^n).$$

4. Considérons enfin le schéma d'Euler "symplectique"

$$(3) \qquad q_j^{n+1} = q_j^n + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^{n+1}, p^n), \quad p_j^{n+1} = p_j^n - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_j}(q^{n+1}, p^n).$$

a) On suppose dans cette question que $H(p, q) = K(p) + V(q)$ pour tout $(q, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Montrer que le schéma (3) est explicite.

b) Montrer que pour un système hamiltonien général, le schéma (3) est au moins d'ordre 1.

c) Écrire le schéma d'Euler symplectique pour (E) et montrer qu'il est explicite. Montrer ensuite que H_e n'est pas préservé.

d) On introduit une modification, notée H_{app}, de H_e associée à (E), et définie par

$$H_{app}(x, v) = H_e(x, v) + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial H_e}{\partial x} \frac{\partial H_e}{\partial v}.$$

Montrer que $H_{app}(x^{n+1}, v^{n+1}) = H_{app}(x^n, v^n)$.

Ainsi, dans le cas du pendule linéaire, nous avons deux schémas qui préservent soit l'hamiltonien H_e soit une valeur approchée de H_e, notée H_{app}. Dans la suite du problème, nous allons considérer des systèmes différentiels hamiltoniens plus généraux et étudier le schéma d'Euler symplectique (3).

Partie II : Systèmes différentiels Hamiltoniens

Préliminaires sur les systèmes différentiels linéaires

Soit m un entier naturel non nul.

1. Montrer que la fonction déterminant det : $M_m(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer $\dfrac{\partial \det}{\partial A_{i,j}}$ pour $i, j \in [1, m]$.
3. En déduire que la différentielle du déterminant en $A \in M_d(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$d_A \det(H) = Tr({}^T\mathrm{com}(A) H).$$

4. Soit $A : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{R})$ une fonction continue.

(a) Soit $1 \leq j \leq m$. Montrer qu'il existe une solution maximale et globale unique, qu'on notera X_j, de $X'(t) = A(t)X(t)$ telle $X(0) = e_j$, e_j étant le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

(b) On note $R(t)$ la matrice formée des m vecteurs colonnes $(X_j(t))_{j=1,m}$. Écrire le problème de Cauchy satisfait par R. Montrer que $r : t \mapsto \det(R(t))$ vérifie une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

(c) Déduire des questions précédentes que $r(t) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))ds\right)$.

Quelques propriétés des systèmes différentiels hamiltonien

1. Enoncer le théorème de Cauchy Lipschitz pour le système (1) en précisant bien les hypothèses faites sur H.

2. Dans la suite, on notera, quand elle est définie, $(q(t), p(t)) = \Phi_t^H(q_0, p_0)$ l'unique solution maximale de (1) avec la condition initiale (q_0, p_0). On notera $[0, T_0[$ son domaine de définition.

   a) Montrer que pour tout $t \in [0, T_0[$, $H(\Phi_t^H(q_0, p_0)) = H(q_0, p_0) \quad (P_1)$.

   b) Si $\lim_{\|(q,p)\| \to \infty} H(q, p) = +\infty$, montrer que $t \mapsto \Phi_t(q_0, q_0)$ est définie sur $[0, +\infty[$ pour tout (q_0, p_0).

   c) On suppose H est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$: donner sans justifier la régularité de $\Phi_t^H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$?

3. On note $\mathcal{J}_t^H = \nabla_{q_0,p_0} \Phi_t^H \in M_{2d}(\mathbb{R})$ la matrice jacobienne de Φ_t^H.

   a) Que vaut $\mathcal{J}_0^H$? Montrer que $\mathcal{J}_t^H$ vérifie le système différentiel $\frac{d\mathcal{J}_t^H}{dt} = \mathcal{A}(t)\mathcal{J}_t^H$ où $\mathcal{A}(t)$ désigne la matrice

$$\mathcal{A}_{i,j}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}(q(t), p(t)), \quad \mathcal{A}_{i,j+d}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(q(t), p(t)),$$
$$\mathcal{A}_{i+d,j}(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}(q(t), p(t)), \quad \mathcal{A}_{i+d,j+d}(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}(q(t), p(t)),$$

   où $i, j = 1, \cdots, d$.

   b) Montrer que $\det(\mathcal{J}_t^H)$ vérifie une équation différentielle linéaire.

   c) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(\mathcal{J}_t^H) = 1, \quad (P_2)$.

4. L'objectif de cette question est de montrer la propriété :

$$\text{pour tout } \ t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{J}_t^H)^T \, \mathbb{J} \, \mathcal{J}_t^H = \mathbb{J}, \quad (P_3).$$

   a) On définit, pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice $G(t) = (\mathcal{J}_t^H)^T \mathbb{J} \mathcal{J}_t^H \in M_{2d}(\mathbb{R})$. Que vaut $G(0)$?

   b) Montrer que $\dot{G}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et conclure.

   c) Montrer que la propriété (P_3) implique (P_2).

Partie III : Etude du schéma d'Euler symplectique

On rappelle que H est de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 2$ et que ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées.

Supposons donné un schéma numérique à un pas de (1) : $(q^{n+1}, p^{n+1}) = \Psi^H_{\delta t}(q^n, p^n)$ où $\Psi^H_{\delta t} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ en ses variables $q \in \mathbb{R}^d, p \in \mathbb{R}^d$ et $\delta t > 0$. On souhaite que $\Psi^H_{\delta t}$ vérifie au niveau discret les propriétés $(P_i), i = 1, 2, 3$ démontrées dans la partie II. Celles ci s'écrivent :

- $(\tilde{P}_1)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H(q^{n+1}, p^{n+1}) = H(q^n, p^n)$ ou encore $H \circ \Psi^H_{\delta t} = H$
- $(\tilde{P}_2)$ $\quad \det(\nabla_{q,p}\Psi^H_{\delta t}) = 1$ pour tout δt assez petit.
- $(\tilde{P}_3)$ $\quad (\nabla_{q,p}\Psi^H_{\delta t})^T \mathbb{J}(\nabla_{q,p}\Psi^H_{\delta t}) = \mathbb{J}$ pour tout $\delta t > 0$ assez petit.

L'objectif de cette section est d'examiner le comportement du schéma d'Euler symplectique vis à vis des propriétés $(P_i), i = 1, 2, 3$. On rappelle que ce dernier s'écrit :

$$q_j^{n+1} = q_j^n + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q_j^{n+1}, p_j^n), \quad p_j^{n+1} = p_j^n - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_j}(q_j^{n+1}, p_j^n). \tag{4}$$

1. Montrer, à l'aide du théorème du point fixe, qu'il existe $\eta > 0$ et une application $\Psi^H_{\delta t} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ telle que le schéma (4) soit équivalent à $(q^{n+1}, p^{n+1}) = \Psi^H_{\delta t}(q^n, p^n)$ pour tout $\delta t \in [0, \eta]$.
2. Monter que $(\delta t, q, p) \mapsto \Psi_\delta t^H(q, p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer ensuite que le schéma (4) est au moins d'ordre 1.
4. On se propose de montrer la propriété $(\tilde{P}_2)$
   a) Identifier Ψ^H_0 et calculer $\nabla_{q,p}\Psi^H_0$.
   b) En déduire que la propriété $(\tilde{P}_3)$ implique la propriété $(\tilde{P}_2)$.

5. On se propose de montrer $(\tilde{P}_3)$ pour $d = 1$: on note $p_1 = p$, $q_1 = q$ et $\Psi^H_{\delta t} = (\psi_1, \psi_2)$.
   a) En utilisant les équations implicites satisfaites par $\psi_i, i = 1, 2$, exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial q}$ et $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial p}$ en fonction de ψ^1 et des dérivées secondes de H.
   b) Montrer la propriété $(\tilde{P}_3)$.

6. On examine maintenant la propriété $(\tilde{P}_1)$ pour $d \geq 1$.
   a) Donner un exemple de système hamiltonien pour lequel $(\tilde{P}_1)$ n'est pas vérifié.
   b) Montrer que H est lipschitzienne sur toute partie compacte $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$
   c) Soit $T > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\delta t = T/N$. On note $(q(t), p(t)), t \in [0, T]$ l'unique solution de (1) telle que $(q, p)|_{t=0} = (q_0, p_0)$ et on note $(q^n, p^n) = \left(\Psi^H_{\delta t}\right)^n (q_0, p_0)$ où $n \in [0, N]$. Montrer qu'il existe $C_1(T) > 0$ tel que
   $$\|(q^n, p^n) - (q(n\delta t), p(n\delta t))\| \leq C_1(T)\, \delta t, \quad \forall n \in [0, N].$$

d) On suppose qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, compact, pour tout $s \in [0,t]$ $(q(s), p(s)) \in K$ et pour tout $k \in [0,n]$, $(q^k, p^k) \in K$. Montrer qu'il existe $C_2(T)$ telle que $|H(q^n, p^n) - H(q^0, p^0)| \leq C_2(T)\, \delta t$, $\forall n \in [0, N]$.

7. On va améliorer le résultat de la question précédente en introduisant un hamiltonien $\tilde{H}$ modifié et rendre la constante $C_2(T)$ uniforme par rapport à T. On supposera que $d = 1$ et les dérivées partielles de H à l'ordre 3 sont bornées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On introduit l'hamiltonien modifié $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = H + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}.$$

et le système différentiel hamiltonien associé $\dot{\tilde{y}} = J\nabla \tilde{H}(\tilde{y})$ où $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une solution maximale globale unique de $\dot{\tilde{y}} = J\nabla \tilde{H}(\tilde{y})$ et $\tilde{y}(0) = y_0$.

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{H}(y_0)$.

c) Calculer $\ddot{\tilde{y}}(t)$ et en déduire un développement limité de $\tilde{y}(t + \delta t)$ à l'ordre 2 par rapport à $\delta t > 0$.

d) Donner un développement limité de $\Psi_{\delta t}^{\tilde{H}}(\tilde{y})$ à l'ordre 2 par rapport à $\delta t > 0$.

e) Montrer alors que $\tilde{y}(t + \delta t) = \Psi_{\delta t}^{\tilde{H}}(\tilde{y}(t)) + \mathcal{O}(\delta t^3)$.

f) On suppose qu'il existe $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, compact, tel que $\forall t \geq 0, \tilde{y}(t) \in K$ et pour tout $n \geq 0$, $(q^n, p^n) \in K$. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ tel que

$$|\tilde{H}(q^n, p^n) - \tilde{H}(q^0, p^0)| \leq C_3 \delta t^2.$$

FIN DU SUJET 2