2C4 121

Ecole Normale Supérieure de Cachan

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2014

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
SECOND CONCOURS SESSION 2014
ENS CACHAN

Ce sujet est composé de trois parties totalement indépendantes. Dans la première partie on déterminera une condition nécessaire et suffisante pour avoir la densité de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. La seconde partie concerne les fonctions de Green dans les domaines simplement connexes de $\mathbb{R}^2$. La troisième partie est reliée à la décomposition de Hodge-DeRham des champs harmoniques pour les domaines bornés.

Dans tout le sujet, on note respectivement $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, réels et complexes.

Première partie

Notation : soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sera noté $\mathbb{Z}[X]$. Nous supposons connu le théorème de Weierstrass :

$$\mathbb{R}[X] \text{ est dense (pour la convergence uniforme) dans } \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).$$

1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$. Supposons qu'il existe un entier relatif $k \in [a,b]$. En remarquant que $P_n(k)$ appartient à $\mathbb{Z}$ pour tout n, en déduire qu'il n'est pas possible que $\mathbb{Z}[X]$ soit dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

2.a. A partir de maintenant, nous allons supposer que $0 < a < b < 1$. On définit le polynôme $p(x) = 2x(1-x)$ et on note par $p^{(n)}(x) = p \circ \cdots \circ p(x)$ le énième itéré. Soit $x_0 \in [a,b]$, montrer que $x_n = p^{(n)}(x_0)$ appartient à $]0,1/2]$ pour tout $n \geq 1$.

2.b. Montrer que la suite x_n converge vers $1/2$.

3.a. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geq 1$, on a les inégalités :

$$\min(p^{(n)}(a), p^{(n)}(b)) \leq p^{(n)}(x) \leq 1/2.$$

3.b. En déduire que $(p^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $1/2$.

4.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, montrer qu'il existe une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $(1/2)^k$.

4.b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\sup_{x\in[a,b]} |P(x) - \alpha| \leq \varepsilon.$$

(*Indication : on montrera qu'il existe* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que* $|\alpha - q(1/2)^k| \leq \varepsilon/2$.)

4.c. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\sup_{x\in[a,b]} |Q(x) - \alpha x^n| \leq \varepsilon.$$

4.d. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense (pour la convergence uniforme sur $[a,b]$) dans $\mathbb{R}[X]$.

5. Conclure que $\mathbb{Z}[X]$ est dense (pour la convergence uniforme) dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si $[a,b]$ ne contient pas d'entier relatif.

Deuxième partie

L'objectif de ce problème est d'étudier les fonctions de Green en dimension deux. Dans toute cette partie, x est un vecteur de $\mathbb{R}^2$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $|\cdot|$ correspond au module : $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, le signe $\cdot$ dans $x \cdot y$ correspond au produit scalaire canonique. L'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans un ouvert O est noté $C_c^\infty(O)$. Enfin, si $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

1.a. Soit y un vecteur de $\mathbb{R}^2$ fixé, nous définissons $f_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|$. Pour tout $x \neq y$, montrer que $\nabla f_y(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2}$.

1.b. Soit φ une fonction $C_c^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. En passant aux coordonnées polaires, démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\varphi)(z+y) \cdot \frac{z}{|z|^2}\, dz = -2\pi\varphi(y)$$

Nous définissons le laplacien de f_y au sens des distributions, c'est à dire que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, nous notons $\langle \Delta f_y, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla f_y(x) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx$. La mesure de Dirac supportée en x_0 est notée δ_{x_0} ou $\delta(\cdot - x_0)$.

1.c. Démontrer que $\Delta f_y(x) = \delta(x-y)$ au sens des distributions, c'est à dire que

$$\langle \Delta f_y, \varphi\rangle = \varphi(y) \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}).$$

On dit que la fonction $G_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|$ est la fonction de Green pour le plan $\mathbb{R}^2$. L'objectif de la suite est de trouver une formule pour la fonction de Green dans des sous-domaines Ω de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire que pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donné, nous recherchons une fonction $G_\Omega : \Omega^2 \to \mathbb{R}$ telle que

i) $G(x,y) = G(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \Omega^2$,

ii) pour tout $y \in \Omega$ fixé, $\Delta_x G(x,y) = \delta(x-y)$ (au sens des distributions),

iii) $G(x,y) = 0$ si x ou y est sur le bord $\partial\Omega$.

Dans toute la suite, nous notons la boule unité par $D = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$, et nous utilisons la notation $*$ pour $z^* = \frac{z}{|z|^2}$.

2.a. Dans la boule unité, nous définissons $G_D(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln\left(\dfrac{|x-y|}{|x-y^*||y|}\right)$. Démontrer que cette fonction vérifie les conditions i) et iii).

2.b. Démontrer que cette fonction vérifie le point ii), c'est à dire que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(D,\mathbb{R})$ (en particulier $\varphi = 0$ sur ∂D), on a $\langle \Delta_x G_D(\cdot,y), \varphi\rangle = \varphi(y)$.

2.c. Vérifier que cette fonction est aussi une fonction de Green sur l'extérieur de la boule unité $\{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| > 1\}$.

Dans la suite, nous identifions les ouverts de $\mathbb{R}^2$ avec les ouverts de $\mathbb{C}$ ($z = x_1 + ix_2$). Nous redémontrons les équations de Cauchy-Riemann dans les questions 3 pour identifier les fonctions à variables complexe et vectorielle.

3.a. Soit T une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ par $g(x_1, x_2) = T(x_1 + ix_2)$. Montrer que si T est holomorphe alors g est différentiable et $\dfrac{\partial g}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 0$.

3.b. On définit T_1 (respectivement T_2) la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) de g : $g(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) + iT_2(x_1, x_2)$ avec T_1 et T_2 des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Déduire de la relation précédente les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial T_1}{\partial x_2}.$$

Soit Ω un ouvert borné, C^∞, connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Riemann (admis) il existe une application conforme T (holomorphe, bijective, et son inverse est holomorphe) qui envoie Ω sur D (et $\partial\Omega$ sur ∂D). À cette application à variable et valeur complexes T, nous associons une fonction à variable et à valeur vectorielles $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$, avec T_1 et T_2 construits comme ci dessus.

4.a. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, $J_{\widetilde{T}}(x)^T J_{\widetilde{T}}(x) = J_{\widetilde{T}}(x) J_{\widetilde{T}}(x)^T = (\det J_{\widetilde{T}}(x)) I_2 = |\det J_{\widetilde{T}}(x)| I_2$.
(*Notation : $J_{\widetilde{T}}(x)$ est la matrice jacobienne* $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}(x)$, *$J_{\widetilde{T}}(x)^T$ est la transposée de $J_{\widetilde{T}}(x)$ et I_2 est la matrice identité en dimension deux*).

4.b. Soit $\widetilde{\varphi}$ une fonction différentiable de D vers $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a $\nabla(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{T})(x) = J_{\widetilde{T}}(x)^T (\nabla\widetilde{\varphi})(\widetilde{T}(x))$ et que $\nabla^\perp(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{T})(x) = J_{\widetilde{T}}(x)^T (\nabla^\perp\widetilde{\varphi})(\widetilde{T}(x))$.
(*Notation : $\perp$ correspond à la rotation de $\pi/2$: $\nabla^\perp h = (\nabla h)^\perp = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{pmatrix}$.*)

4.c. Nous définissons $G_\Omega(x, y) = G_D(\widetilde{T}(x), \widetilde{T}(y))$ (voir question 2.a.). Montrer que G_Ω vérifie les points i) et iii).

4.d. Démontrer que cette fonction vérifie le point ii), c'est à dire que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on a $\langle \Delta_x G_\Omega(\cdot, y), \varphi \rangle = \varphi(y)$.
(Indication : on pourra introduire $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \widetilde{T}^{-1}$ afin de procéder à un changement de variable $\xi = \widetilde{T}(x)$ dans l'intégrale.)

Conclusion : les fonctions de Green sont utiles pour avoir la formule explicite de la solution ψ du problème de Laplace $\Delta\psi = f$ sur Ω, $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette formule est

$$\psi(x) = \int_\Omega G_\Omega(x, y) f(y)\, dy.$$

Troisième partie

Dans cette partie, nous étudions les champs de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ qui sont C^∞ et qui vérifient

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = f \text{ dans } \Omega, \quad u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

Ω est un ouvert C^∞ borné de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{n}$ correspond au vecteur normal sortant du domaine. On dira qu'un champ de vecteurs est harmonique s'il est de divergence nulle, de rotationnel nul et tangent au bord (c'est à dire $u \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$). Les intégrales le long d'une courbe fermée seront prises dans le sens trigonométrique. Nous rappelons la formule de Stokes concernant $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$:

$$\int_\Omega \psi(x) \operatorname{div} v(x)\, dx + \int_\Omega v(x) \cdot \nabla\psi(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v \cdot \vec{n})\psi\, ds.$$

Dans toute cette partie, la notation $\perp$ correspond à la rotation de $\pi/2$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ et $\nabla^\perp h = (\nabla h)^\perp = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} \end{pmatrix}$.

Nous admettrons aussi le théorème suivant concernant la solution du problème de laplace :

Théorème 1. *Soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et Ω un ouvert C^∞ borné, alors il existe une unique solution $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ du problème suivant :*

$$\Delta\psi_0 = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \psi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2)$$

1.a. Déduire de la formule de Stokes les formules suivantes :

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \vec{n}\, ds \quad \text{et} \quad \int_\Omega \operatorname{rot} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \vec{\tau}\, ds$$

où $\tau = n^\perp$ est le vecteur tangent.

1.b. Soit $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{rot}(\nabla^\perp f)$.

1.c. Soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et ψ_0 une solution du problème (2). Montrer que $\nabla^\perp\psi_0$ est une solution de (1).

1.d. Uniquement pour cette question, on considère le cas où Ω est l'anneau $\{x \in \mathbb{R}^2,\ 1 < |x| < 2\}$. Montrer que le champ de vecteurs $x \mapsto \frac{x^\perp}{|x|^2}$ est de divergence nulle, de rotationnel nul et tangent au bord. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nabla^\perp\psi_0 + \alpha\frac{x^\perp}{|x|^2}$ est une solution de (1).

Dans la suite de ce problème, nous supposons que Ω est un ouvert borné C^∞ connexe de $\mathbb{R}^2$ qui s'écrit sous la forme $\widetilde{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N K_i\right)$ où $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert borné connexe et simplement connexe, et où les K_i sont des compacts connexes simplement-connexes inclus dans $\widetilde{\Omega}$ et disjoints deux à deux. Nous admettrons les deux propriétés suivantes :

Proposition 2. *Soit u un champ de vecteurs de divergence nulle et tangent au bord, alors il existe un unique ψ telle que $u = \nabla^\perp\psi$ et $\psi = 0$ sur $\partial\widetilde{\Omega}$. De plus ψ est constant sur chaque bord ∂K_i (mais cette constante n'est pas forcément la même pour $i \neq j$).*

Proposition 3. *Soit u un champ de vecteurs de rotationnel nul tel que la circulation autour de tous les compacts K_i est nulle (c'est à dire que $\int_{\partial K_i} u\cdot(-\vec{\tau})\, ds = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, N$), alors il existe p telle que $u = \nabla p$.*

2. Montrer qu'un champ tangent au bord qui est à divergence et rotationnel nuls, et de circulation autour de K_i nulle pour tout i, est nul.
(*Indication : on pourra calculer* $\int_\Omega |u(x)|^2\, dx$.)

3.a. Soit $i = 1, \ldots, N$ fixé. Montrer qu'il existe une unique fonction $g_i \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\Delta g_i = 0$ sur Ω, $g_i = 1$ sur ∂K_i et $g_i = 0$ sur $\partial\widetilde{\Omega} \cup_{j\neq i} \partial K_j$.
(*Indication pour l'existence : on pourra utiliser la fonction de troncature* $\chi_i \in C^\infty(\Omega, [0,1])$ *qui vaut* 1 *dans un voisinage de* K_i *et* 0 *dans un voisinage de* $\partial\widetilde{\Omega} \cup_{j\neq i} K_j$, *puis étudier* $\psi_i + \chi_i$ *où* ψ_i *est la solution de* (2) *pour* $f = -\Delta\chi_i$. *Il n'est pas demandé de construire explicitement la fonction* χ_i *et nous pourrons considérer son existence comme connue.*)

3.b. Montrer que la famille $(\nabla^\perp g_i)_{i=1,\ldots,N}$ forme une base de l'espace des champs de vecteurs harmoniques.

3.c. Soit u une solution de (1) et ψ_0 l'unique solution de (2). Montrer que u peut être décomposée comme $u = \nabla^\perp\psi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \nabla^\perp g_i$, avec $C_i \in \mathbb{R}$.

4.a. On considère l'application L qui va de l'espace des champs de vecteurs harmoniques dans $\mathbb{R}^N$, qui a φ associe le vecteur circulation :

$$L(\varphi) = \left(\int_{\partial K_1} \varphi \cdot (-\vec{\tau})\, ds, \int_{\partial K_2} \varphi \cdot (-\vec{\tau})\, ds, \ldots, \int_{\partial K_N} \varphi \cdot (-\vec{\tau})\, ds \right).$$

Montrer que L est linéaire et bijective.

4.b. En déduire l'existence d'une autre base de l'espace des champs de vecteurs harmoniques $(H_i)_{i=1,\ldots,N}$, où H_i est harmonique, de circulation 1 autour de K_i et de circulation zéro autour des K_j pour $j \neq i$.

4.c. Pour tout $i = 1, \ldots, N$, d'après la proposition 2, il existe une fonction ψ_i et des constantes $C_{i,j}$ telle que $H_i = \nabla^\perp\psi_i$ dans Ω, $\psi_i = 0$ sur $\partial\widetilde{\Omega}$, $\psi_i = C_{i,j}$ sur ∂K_j. En écrivant la décomposition de H_i dans la base $(\nabla^\perp g_j)_{j=1,\ldots,N}$ et en calculant la circulation autour de K_p, démontrer la relation suivante : $-I_N = CM(g)$, où I_N est la matrice identité en dimension N, $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$ et $M(g) = \left(\int_\Omega \nabla g_i \cdot \nabla g_j \right)_{i,j=1,\ldots,N}$.

4.d. Montrer que $M(g)$ est symétrique définie positive.

4.e. En déduire en particulier que $C_{i,j} = C_{j,i}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, que $C_{i,i} < 0$ et que la matrice C correspond à la matrice de changement de base de $(\nabla^\perp g_j)_{j=1,\ldots,N}$ à $(H_i)_{i=1,\ldots,N}$.

5.a. Soit ψ_0 la solution de (2). Montrer que la circulation de $\nabla^\perp\psi_0$ autour de K_i vaut $-\int_\Omega f(y) g_i(y)\, dy$.

5.b. Démontrer le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit* $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *et* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N$ *fixés. Il existe un unique champ de vecteurs* $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ *vérifiant* (1) *et tel que* $\int_{\partial K_i} u \cdot (-\vec{\tau})\, ds = \gamma_i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, N$. *Nous avons de plus la décomposition suivante :*

$$u(x) = \nabla^\perp\psi_0(x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i H_i(x)$$

où ψ_0 *est l'unique solution de* (2) *et où* $\alpha_i = \gamma_i + \int_\Omega f(y) g_i(y)\, dy$.

Fin de l'épreuve