

C30192

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 3^{ème} année
GÉNIE ÉLECTRIQUE
Session 2010

Épreuve de
TECHNIQUES NUMÉRIQUES ET AUTOMATIQUE

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé selon la circulaire n°99018 du 1^{er} février 1999. De plus, une seule calculatrice est admise sur la table, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats. »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve est constituée de 2 parties indépendantes (techniques numériques et automatique) qui doivent être obligatoirement traitées et rédigées sur des copies séparées.

Problème A

(Durée : 2 heures)

Techniques numériques Implantation d'un filtre numérique dans un FPGA

A.1 Présentation

Les FPGA disposent de multiplieurs câblés et de suffisamment de ressources en portes logiques pour pouvoir implanter un filtre numérique. On se propose, dans ce problème, d'étudier les différentes étapes nécessaires pour passer de la fonction de transfert en z obtenue à l'aide d'un outil de synthèse de filtre à la description VHDL de la structure de filtrage.

La fonction de transfert du filtre à implanter est celle-ci :

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{0,0047 + 0,0188 \cdot z^{-1} + 0,0282 \cdot z^{-2} + 0,0188 \cdot z^{-3} + 0,0047 \cdot z^{-4}}{1 - 2,5726 \cdot z^{-1} + 2,8324 \cdot z^{-2} - 1,5086 \cdot z^{-3} + 0,3249 \cdot z^{-4}}$$

La réponse en fréquence de cette fonction de transfert est donnée en annexes.

A.2 De la fonction de transfert à l'équation récurrente

***Question 1)** Donner l'équation récurrente associée à la fonction de transfert ci-dessus permettant de calculer la valeur de l'échantillon de sortie à l'instant nT_e , noté $y(n)$.*

***Question 2)** Déterminer les ressources nécessaires à l'implantation de cette équation en terme d'opérations et de mots mémoires.*

On décompose la fonction de transfert en deux parties :

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{y(z)}{w(z)} \cdot \frac{w(z)}{x(z)} \text{ avec}$$

$$\frac{y(z)}{w(z)} = \frac{0,0047 + 0,0188 \cdot z^{-1} + 0,0282 \cdot z^{-2} + 0,0188 \cdot z^{-3} + 0,0047 \cdot z^{-4}}{1}$$

$$\frac{w(z)}{x(z)} = \frac{1}{1 - 2,5726 \cdot z^{-1} + 2,8324 \cdot z^{-2} - 1,5086 \cdot z^{-3} + 0,3249 \cdot z^{-4}}$$

Les réponses en fréquence de ces 2 fonctions de transfert sont données en annexes.

***Question 3)** Donner les équations récurrentes associées aux 2 fonctions transferts élémentaires et déterminer les ressources nécessaires.*

A.3 Quantification des coefficients

Les multiplieurs câblés du FPGA effectuent des multiplications en compléments à 2 18x18->36 bits. Il est donc nécessaire de donner une représentation entière des coefficients des équations récurrentes élaborant $w(n)$ et $y(n)$ définies ci-dessus. Par ailleurs les convertisseurs analogique-numérique ($x(t) \rightarrow x(n)$) et numérique-analogique ($y(n) \rightarrow y(t)$) sont des convertisseurs 12 bits en complément à 2.

Pour manipuler, en VHDL, des vecteurs de bit en tant que nombres entiers en complément à 2, il faut utiliser le type **SIGNED** :

signal VAL : SIGNED(Ns-1 downto 0) ;

VAL est alors un vecteur de N_s bits interprété comme un nombre entier en complément à 2 que l'on peut donc manipuler comme nombre entier pour les opérations arithmétique de base (addition, soustraction, complément, etc..) ou bit par bit, comme n'importe quel vecteur de bits.

Le filtre total n'a pas de gain, et donc puisque les échantillons d'entrée $\{x(n)\}$ sont codés sur 12 bits, il en sera de même pour les échantillons de sortie $\{y(n)\}$. Par contre la fonction de transfert $w(z)/x(z)$ fait apparaître un gain de 24 dB.

Question 4) *Quel nombre de bits N_w est nécessaire pour mémoriser les échantillons $\{w(n)\}$?*

La quantification des coefficients des équations récurrentes c_i consiste à remplacer les valeurs réelles des c_i par des valeurs entières $C_i = \text{arrondi}(c_i \cdot 2^k)$. On utilise le même facteur k pour tous les coefficients.

Question 5) *Compte tenu des valeurs des c_i donner le nombre de bits nécessaires à la représentation en complément à 2 des C_i en fonction de k .*

Les coefficients c_i sont affichés à $0,5 \cdot 10^{-4}$ près.

Question 6) *Quelle valeur de k permet d'avoir, après quantification, la même erreur relative des coefficients qu'avant quantification ? Quel sera alors le nombre de bits N_c nécessaire à la représentation entière des coefficients ?*

Question 7) *Donner les valeurs des coefficients ainsi quantifiés.*

Question 8) *Quelles sont les équations récurrentes à implanter avec les coefficients C_i pour élaborer $w(n)$ et $y(n)$?*

Il apparaît nécessaire d'effectuer une division par 2^k (ou une multiplication par 2^{-k}).

Question 9) *A quelle opération logique implantable dans un FPGA correspond cette division ?*

A partir des déclarations suivantes :

```
signal Y : SIGNED(11 downto 0) ; -- échantillon de sortie
signal accu : SIGNED(Nacc-1 downto 0) ;
```

Question 10) *donner la description VHDL qui permet d'élaborer $Y = \text{accu} * 2^{-k}$.*

Les multiplieurs sont utilisés comme des composants dont la déclaration est :

```
component MULT18x18
port (
  A, B : in SIGNED(17 downto 0) ;
  P : out SIGNED(35 downto 0));
end component;
```

il est donc nécessaire d'étendre les diverses représentations (X , $\{W(n)\}$, C_i) respectivement sur 12, N_w et N_c bits à 18 bits, pour pouvoir être connectées aux entrées des multiplieurs.

Question 11) *Comment, en complément à 2, passe-t-on d'une représentation sur N bits à une représentation sur N' bits avec $N' > N$?*

A partir des déclarations suivantes :

```
signal X : SIGNED(11 downto 0) ; -- échantillon d'entree
signal X18 : SIGNED(17 downto 0) ; --échantillon d'entree codé sur 18 bits
```

Question 12) *Donner la description VHDL qui permet d'élaborer X18 à partir de X.*

Pour la suite on suppose que l'on dispose d'une fonction '**Signed eXTand**' :

```
SXT(input : signed, taille : natural) return signed ;
```

qui étend l'entrée 'input' à la représentation sur 'taille' bits (i.e. $X_{18} \leftarrow SXT(X,18)$;)

Pour chaque équation récurrente il s'agit d'effectuer la somme de 5 produits de 36 bits. L'implantation matérielle se traduira par l'organisation suivante :

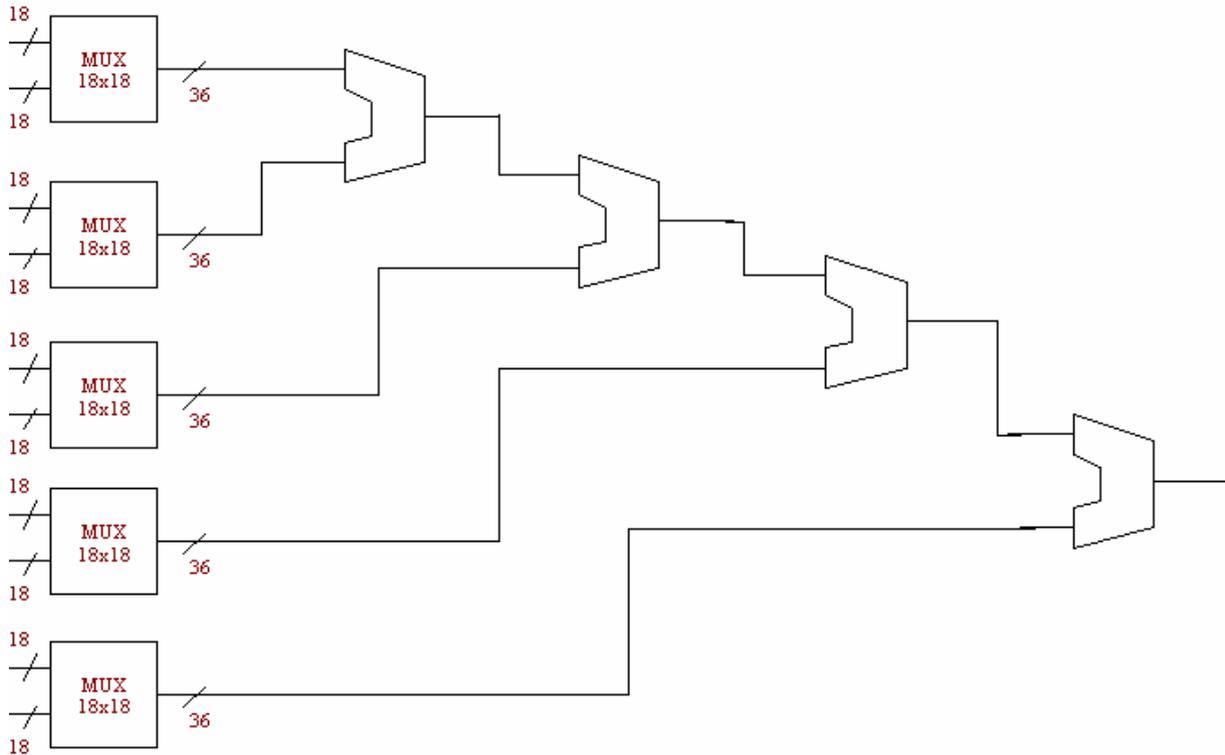


figure 1 : implantation d'une somme de 5 produits

On considère que les opérandes entrées des multiplieurs sont tous dans la plage $-2^{17} < x < 2^{17}$ (on exclue la valeur -2^{17})

Question 13) Montrer que le produit de tels opérandes tient sur 35 bits. Comment cela se traduit-il sur la représentation de ce produit sur 36 bits ?

Question 14) Combien de bits sont nécessaires pour pouvoir effectuer la somme de N produits de 35 bits, si l'on ne fait aucune hypothèse sur la plage effective de ses produits ?

Question 15) Compléter le document réponse joint en précisant pour tous les signaux la taille de la représentation nécessaire, les extensions de représentation (à l'aide de la fonction SXT), sachant que, pour la description VHDL, tous les opérandes (entrées et sorties) d'une addition doivent être de la même taille.

Question 16) Compte tenu des valeurs de N_w (Question 4) et de N_c (Question 6), quelle sera la taille nécessaire à la représentation de la somme de tous les produits

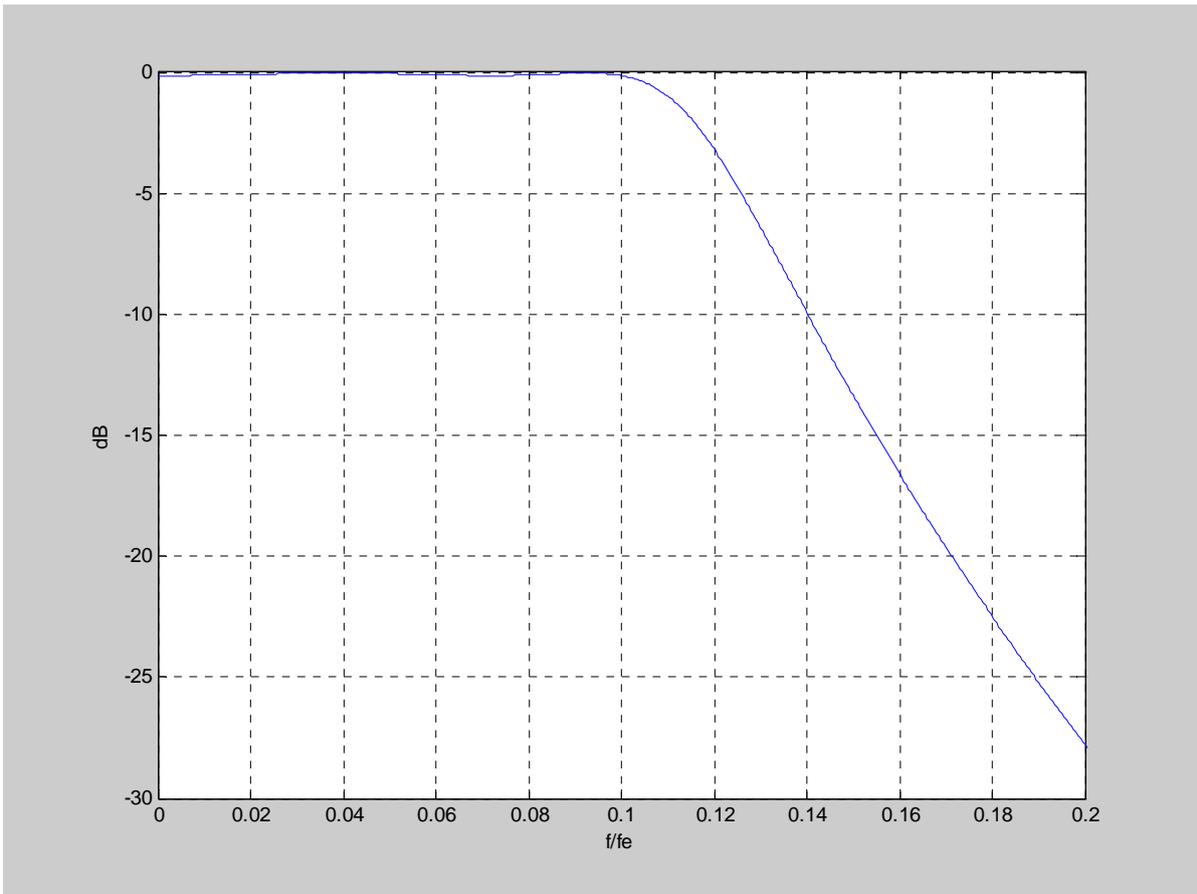
A.4 Description complète du filtre

L'entité du filtre est :

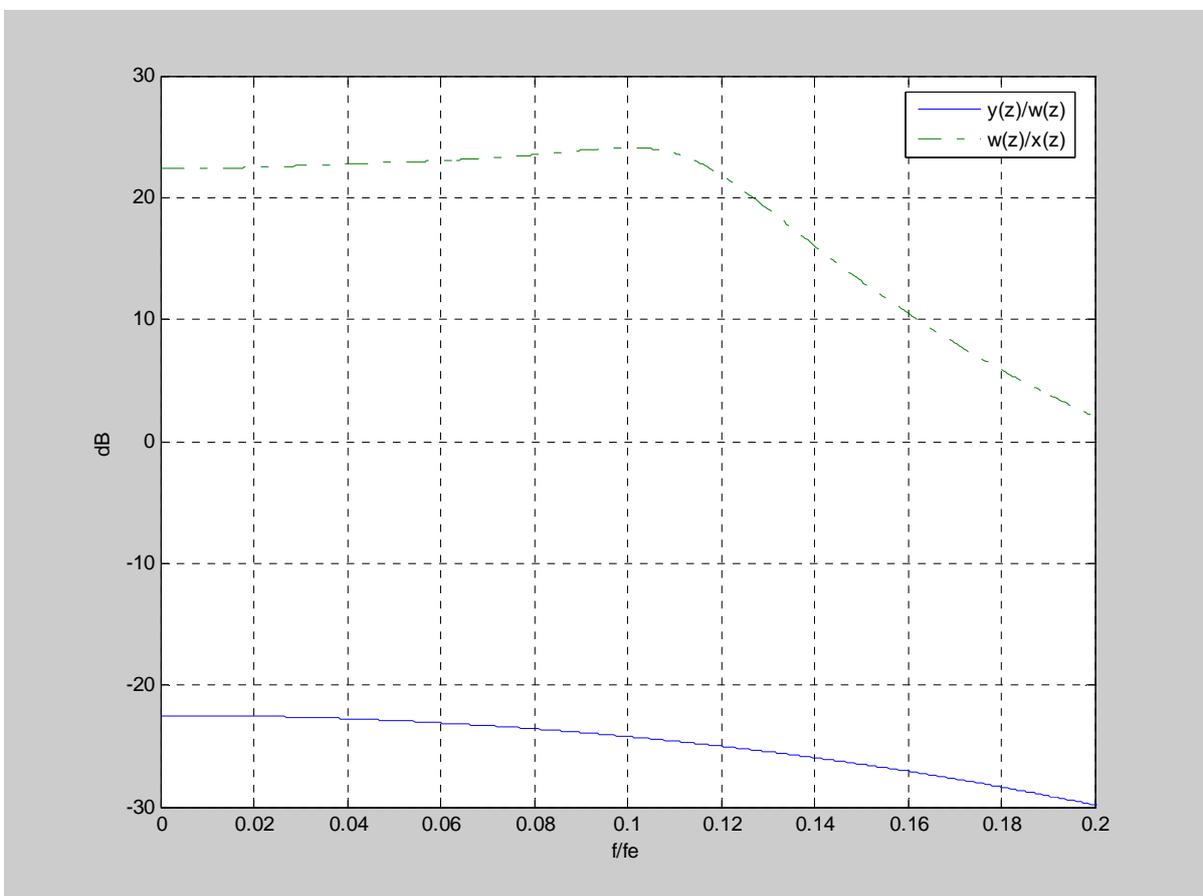
```
entity filtre is
  port (
    He : in bit ; -- horloge d'échantillonnage, à utiliser sur les fronts montants
    entree : in SIGNED(11 downto 0) ;
    sortie : out SIGNED(11 downto 0)
  );
end filtre;
```

Question 17) Donner la description complète de l'architecture de ce filtre.

ANNEXES



module de la fonction de transfert $y(z)/x'(z)$



modules des fonctions de transfert $y(z)/w(z)$ et $w(z)/x(z)$

PROBLÈME B

DURÉE : 2 heures

AUTOMATIQUE

Le sujet est composé de 5 pages de texte.

Certaines parties du sujet sont fortement indépendantes

I. Etude d'un système simple

On souhaite réaliser un asservissement avec un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est dans un premier temps assimilée à un premier ordre de fonction de transfert $F(p)$.

$$F(p) = \frac{K_0}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad K_0 = 3 \quad \text{et} \quad \tau = 0,6 \text{ s}$$

- I.1. Représenter la boucle d'asservissement si ce système est inséré dans une boucle à retour unitaire.
- I.2. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte et calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
- I.3. Calculer la bande passante du système en boucle fermée ainsi que le temps de réponse à 90%.
- I.4. On place dans ce système un correcteur proportionnel de gain variable. Représenter la boucle d'asservissement obtenue.
- I.5. Calculer le temps de réponse du système en présence du correcteur. Calculer l'erreur statique du système en présence du correcteur. Donner les valeurs du temps de réponse et de l'erreur lorsque la valeur du gain du correcteur est de 2, 5 et 10.

Le système représenté par $F(p)$ est alimenté par une source de tension $-12/+12\text{V}$. Il en est de même pour les différents circuits électroniques qui permettent de réaliser les différentes fonctions de la boucle d'asservissement.

- I.6. Représenter sur un (ou plusieurs) graphe(s) la réponse du système à un échelon de tension d'amplitude 2V lorsque le correcteur a pour gains : 2, 5 et 10. Pour chacune des 3 valeurs, commenter la forme de la sortie.
Recalculer les temps de réponse pour chacune des 3 valeurs du correcteur.

- I.7. Pouvez vous conclure sur l'intérêt des correcteurs proportionnels dans des cas pratiques ?

II. Relevés expérimentaux du système

On a effectué des relevés du système en boucle ouverte. Les résultats des mesures sont reproduits dans le tableau 1 ci-dessous. Par manque de temps, les derniers points ont seulement fait l'objet de relevés d'oscilloscope reproduits en annexe.

Tableau 1 : relevés de gain et phase effectués sur le système étudié.

Fréquence (Hz)	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2
Gain	3	3	2,95	2,8	2,4		0,76	0,37
Phase (degrés)	-2,5	-4,5	-11	-21	-39		-86	-104

Fréquence (Hz)	5	10	20	50	100	200	500
Gain		0,036		0,0016		0,0001	$1,6 \cdot 10^{-5}$
Phase (degrés)		-151		-173		-178	-179

II.1. Compléter le tableau avec les valeurs manquantes à partir des relevés d'oscilloscope.

II.2. Donner un avis sur la pertinence des dernières mesures effectuées (oscilloscope). Etaient-elles réellement nécessaires dans la perspective de l'étude d'un asservissement ?

II.3. Tracer les diagrammes de Bode du système sur le document-réponse.

II.4. Donner l'ordre du système étudié, ainsi que le gain statique.

II.5. Donner la fonction de transfert $F(p)$ sous une forme normalisée en faisant apparaître la pulsation caractéristique ainsi que le coefficient d'amortissement, le cas échéant.

II.6. Donner la fonction de transfert $F(p)$ sous la forme d'un produit de plusieurs fonctions de transfert du premier ordre. Préciser les constatations faites sur le diagramme de Bode permettant de justifier que l'on puisse mettre la fonction de transfert sous cette forme, ou les hypothèses effectuées pour réaliser cette transformation de la fonction de transfert.

III. Etude du système réel

On souhaite utiliser le système mesuré précédemment dans une boucle d'asservissement. A partir de ce point, on prendra pour fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{K_0}{(1 + \tau p)(1 + \tau' p)} \quad \text{avec} \quad K_0 = 3, \quad \tau = 0,6 \text{ s} \quad \text{et} \quad \tau' = 0,03 \text{ s}$$

La mesure de la grandeur de sortie est effectuée à l'aide d'un capteur de fonction de transfert :

$$M(p) = \frac{K_M}{(1 + \tau_M p)} \quad \text{avec} \quad K_M = 0,5 \quad \text{et} \quad \tau_M = 7 \text{ ms}$$

III.1. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ du système étudié.

III.1. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ du système étudié.

III.2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T(p)$.

Placer quelques points significatifs et tracer la fonction de transfert réelle en boucle ouverte du système étudié.

III.3. Calculer le gain statique en boucle fermée de ce système, ainsi que l'erreur statique de position. Ce système est-il performant tel quel en boucle fermée ?

III.4. Donner la bande passante de l'asservissement et donner une approximation du temps de réponse de ce système, en précisant les hypothèses effectuées.

IV. Etude d'un correcteur

On souhaite implanter un correcteur PID pour améliorer les performances de l'asservissement étudié à la partie III.

IV.1. Rappeler l'expression de la fonction de transfert du correcteur PID. On demande de mettre cette fonction de transfert de manière à faire apparaître un produit de 3 fonctions de transfert élémentaires.

IV.2. Rappeler l'effet des différentes composantes élémentaires employées dans un correcteur PID.

On impose un rapport 8 entre les constantes de temps caractéristiques évoquées à la question IV.1. On souhaite par ailleurs compenser le pôle dominant de la fonction de transfert étudiée, s'il existe.

IV.3. Calculer le correcteur PID de manière à ce que la marge de phase soit de 60° .

IV.4. Représenter le diagramme de Bode du correcteur, ainsi que du système corrigé si possible sur le diagramme de la partie III.

IV.5. Donner la bande passante en boucle fermée de l'asservissement ?

IV.6. Représenter sommairement la réponse à un échelon unitaire du système. Préciser les hypothèses effectuées pour cette représentation.

Le système représenté par $F(p)$ est alimenté par une source de tension $-12/+12V$. Il en est de même pour les différents circuits électroniques qui permettent de réaliser les différentes fonctions de la boucle d'asservissement.

IV.7. Cette information modifie-t-elle la représentation du IV.6. ?

Pour répondre à cette question, il est recommandé de détailler en 3 composantes (P, I et D) le correcteur implanté, et de proposer une allure modifiée de la réponse.

Une réponse qualitative est demandée pour cette question mais aucune précision n'est imposée pour cette réponse.

V. Annexe : relevés d'oscilloscope (partie II)

