R 15 - 83

Ecole normale supérieure de rennes

Département Droit-économie-gestion

Concours d'admission en 1re année

Session 2015

Épreuve à options

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Ce sujet comporte un total de 9 pages

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irréversiblement choisie** au moment de leur inscription.

Les trois options proposées sont :

- droit commercial
- droit public
- mathématiques appliquées

Pour l'option mathématiques appliquées :

- calculatrice autorisée
- deux feuilles de papier millimétré en documents-réponses.

Composition de droit commercial

Sujet :

La formation de la société

Composition de droit public

Sujet :

Ordre public et police administrative

Mathématiques Appliquées et Statistiques

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
- Deux feuilles (papier millimétré) en documents réponses.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.

Exercice 1 (Quelques statistiques sur l'emploi et les salaires.)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur le taux d'emploi selon l'âge et l'autre sur l'évolution des salaires hommes/femmes.

1) On s'intéresse d'abord au taux d'emploi dans la population active. Le tableau suivant *(source : INSEE)* donne la répartition des effectifs, les taux d'emploi, pour chaque tranche d'âges en France en 2011.

Classe d'âges en années	Répartition des effectifs (en %)	Taux d'emploi (en %)			Proportion de temps partiel (en %)
		Ensemble	Hommes	Femmes	
$[15;25[$	8,6	29,5	32,5	26,6	22,4
$[25;40[$	36,8	79,7	85,9	73,7	15,5
$[40;50[$	28,5	84,2	88,6	80,0	17,1
$[50;55[$	13,1	80,3	85,4	75,5	17,3
$[55;60[$	10,1	64,0	67,5	60,7	19,5
$[60;65[$	2,9	18,9	20,4	17,4	31,3

(a) Quel est le type de la série statistique décrite par les deux premières colonnes ?

(b) Tracer son histogramme.

(c) Quelles sont la ou les classes modales de cette série ?

(d) Calculer le taux moyen de temps partiel, pour les 15–65 ans.

(e) Expliquer pourquoi on peut affirmer sans calcul que le taux d'emploi moyen des hommes est supérieur à celui des femmes, pour les 15–65 ans.

2) On s'intéresse maintenant à l'évolution des salaires. Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne le salaire moyen annuel (équivalent temps plein) en euros des personnes en emploi en fonction de leur sexe.

Les salaires sont exprimer en k€, c'est-à-dire en milliers d'euros.

Année	Rang de l'année x_i	Salaire annuel (en k€) Hommes y_i	Femmes z_i	Ensemble t_i	Écart relatif $d_i(en\%)$
1995	0	$19,5$	$15,2$	$17,9$	$23,8$
1996	1	$19,8$	$15,3$	$18,1$	$24,3$
1997	2	$20,1$	$15,7$	$18,4$	$23,7$
1998	3	$20,3$	16	$18,7$	23
1999	4	$20,8$	$16,4$	$19,1$	$22,9$
2000	5	$21,2$	$16,7$	$19,5$	$23,1$
2001	6	$21,7$	$17,1$	20	23
2002	7	$22,2$	$17,5$	$20,4$	$23,1$
2003	8	$22,7$	$17,9$	$20,8$	$22,7$
2004	9	$23,2$	$18,3$	$21,3$	$22,7$
2005	10	$23,8$	19	$21,9$	22
2006	11	$24,2$	$19,4$	$22,3$	$21,7$
2007	12	25	20	23	22
2008	13	$25,8$	$20,6$	$23,7$	22
2009	14	$26,1$	21	24	$21,2$

Les écart relatif ont été calculés comme suit : $d_i = \frac{y_i - z_i}{t_i}$.

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, d_i)_{i=0,\dots,14}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 2%.

(b) Calculer la moyenne et la variance de l'écart relatif.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de d en x par la méthode des moindres carrés.

(e) En déduire une prévision pour l'année 2015.

(f) En quelle année, cet ajustement, permet-il de prévoir l'égalité homme-femme ? Cette prévision est-elle fiable ?

3) *On reprend le tableau précédent, mais cette fois-ci on s'intéresse à l'évolution du salaire moyen* (t_i).

(a) On effectue le changement de variable :

$$\forall i \in \{0; \dots; 14\},\ u_i = \ln(t_i)$$

Présenter dans un tableau la nouvelle série $(x_i; u_i)$.

(b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, u_i). Un ajustement affine est-il justifié ?

(c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de u en x par la méthode des moindres carrés.

(d) En déduire une expression de t en fonction de x.

(e) En déduire enfin une prévision pour l'année 2015.

Exercice 2 (Probabilités)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse à la production d'un confiseur. Il produit des sachets contenant deux gros bonbons.

Ensuite il les conditionne en boîtes de 20 sachets.

Partie 1 – Opération commerciale.

Le confiseur décide de lancer une opération commerciale pour augmenter sa clientèle. Certains sachets contiennent alors un (et un seul) bonbon gagnant.

Si un client gagne, il a droit à un lot de confiseries gratuit.

Un revendeur a disposé deux boîtes de 20 sachets. La première boîte, qu'on appellera A, contient 2 sachets gagnants et l'autre boîte, qu'on appellera B, en contient 3.

Un client arrive, choisit une boîte au hasard et y prend un sachet.

On pose les événements suivants :

- A : « le client a choisi la boîte A. »
- B : « le client a choisi la boîte B. »
- G : « le sachet choisi par le client est gagnant. »
- G_1 : « le premier bonbon du sachet est gagnant. »
- G_2 : « le deuxième bonbon du sachet est gagnant. »

1) Donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(G)$ et $P_B(G)$.

2) Calculer la probabilité que le client choisisse la boîte A et gagne.

3) Calculer la probabilité que le client choisisse la boîte B et gagne.

4) Calculer la probabilité que le client gagne $P(G)$.

5) Le client gagne, quelle est la probabilité qu'il ait pris son sachet dans la boîte B.

6) Donner $P_G(G_1)$ et $P_G(G_2)$.

7) En déduire $P(G_1)$ en remarquant que $G_1 = G_1 \cap G$.

8) Le client prend un sachet, son premier bonbon est perdant, quelle est la probabilité que le deuxième soit gagnant. On remarquera que $G_2 \cap \overline{G_1} = G_2$.

9) G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?

Partie 2 – Problème d'ensachage.

Le confiseur que la machine qui met les bonbons en sachet de deux fait, dans 2% des cas, un sachet de trois bonbons.

On prend une boîte de 20 sachets au hasard, soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de sachets de trois bonbons et Y celle qui donne le poids net (donc hors emballage) des bonbons de la boîte, en grammes.

On sait que chaque bonbon pèse 15g.

1) Déterminer la loi de X.

2) Donner l'espérance et la variance de X.

3) Calculer la probabilité qu'il y ait au maximum 1 sachet de trois dans la boîte.

4) Exprimer Y en fonction de X.
Puis calculer l'espérance et la variance de Y.

5) Quelle est la probabilité que le poids net soit supérieur ou égal à 630g.

Partie 3 – Améliorations.

1) Le confiseur voudrait voir si son stock, qui équivaut au volume de 3 commandes de détaillants, est suffisant.
La variable aléatoire N, qui donne le nombre de commandes de détaillants par jour suit une loi de Poisson de paramètre 2.
Quelle est la probabilité que le stock du confiseur soit insuffisant ?

2) Afin d'éliminer totalement le problème des sachets de trois, le confiseur place, avant la machine à ensacher, une calibreuse qui ne conserve que les bonbons dont le poids est compris entre 14,4g et 15,6g. Les bonbons rejetés sont recyclés.
On tire un bonbon au hasard, la variable aléatoire M qui désigne son poids en grammes suit une loi de Laplace-Gauss (aussi nommée loi normale) de moyenne 15 et d'écart type 0,4.

(a) Quelle est la probabilité qu'un bonbon fasse plus de 16g.

(b) Quelle est la probabilité qu'un bonbon soit conservé par la calibreuse.

3) Afin de plaire au client, le confiseur souhaiterait que 90% de ses bonbons tiennent en bouche au moins 5 minutes.
La nouvelle recette confère aux bonbons une durée en bouche de T minutes, où T est une variable aléatoire suivant une loi log-normale de moyenne 5 et d'écart type 2.
Cette nouvelle recette remplit-elle l'objectif du confiseur ?

Exercice 3 (Étude de fonctions)

Les parties 3 et 4 sont indépendantes.
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

et on note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f.

Partie 1 – Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = x - 1 - x\ln(x)$$

1) Donner le domaine de définition de g.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

3) En déduire le tableau de variation de g. On précisera la valeur de $g(1)$.

4) En déduire le signe de g.

Partie 2 – Étude de f.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

3) En déduire le tableau de variation de f.
On admettra que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Partie 3 – Courbe de f.

On admet que la fonction f peut être prolongée en posant $f(1) = 1$ et qu'ainsi prolongée elle est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

En résumé, la fonction f est maintenant définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\text{Si } x \neq 1,\ f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \text{ et } f(1) = 1$$

Ainsi définie f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\text{Si } x \neq 1,\ f'(x) = \frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2} \text{ et } f'(1) = -\frac{1}{2}$$

1) Recopier le tableau de variations de f, de la question **3)**. de la **partie 2**, en tenant compte du fait que f est maintenant définie en 1.

2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 1.

3) Dans un même repère orthonormé dont l'unités graphique est de 3cm, tracer la tangente (T) puis l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f(\alpha_n) = n$.

5) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $f\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right) = n\alpha_n$.

6) Placer, sans aucun calcul, α_2 puis $\dfrac{1}{\alpha_2}$ sur le graphique précédent, en utilisant la courbe de f.

Partie 4 – Intégration.

On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$H(x) = \ln(x-1) - \ln(x) - f(x)$$

1) Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$H'(x) = \frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$

2) Calculer $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(x)}{(x-1)^2}dx$.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000