SUJET
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
ET STATISTIQUES

Consignes :

- L'usage de la calculatrice, en mode examen, est autorisé pour cette épreuve.
- Une copie double à quadrillage millimétré est fournie avec l'énoncé.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Pour répondre à une question, il est possible d'admettre les résultats d'une question précédente non résolue, à condition que cela soit clairement indiqué sur la copie.
- Une table de la loi normale centrée réduite se trouve en fin de sujet.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer ou souligner, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
- Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Statistiques.

Dans cet exercice les données sont fictives. On s'intéresse à deux statistiques : la première porte sur la proportion de licenciés parmi les inscrits au triathlon M de différentes villes et la deuxième sur le nombre d'adhérents à un club de triathlon selon l'année. Les questions 1 et 2 sont indépendantes. **On donnera les résultats numériques à 10^{-3} près.**

1. Le tableau ci-dessous donne le pourcentage de licenciés parmi les participants au triathlon M de différentes villes françaises.

Ville de l'épreuve	Licenciés (en %) x_i	Ville de l'épreuve	Licenciés en % x_i
Saint Grégoire	90	Dijon	80
Ferté Macé	55.7	Nevers	15
Quiberon	23.4	Mâcon	23.5
Saint-Lunaire	13	Autun	70
Trégastel	65	Chalain	19.3
Saint-Malo	47.9	Chantilly	20.7
Iffendic	34.7	Embrun	80.3
Bain- de- Bretagne	28.2	Sens	32.8
Feins	23.1	Gray	44.3
Saint-M'hervé	67.4	Dole	65
Saint-Coulomb	43.5	Besançon	59
Auray	23.9	Chantilly	34.9
Belfort	48	Vesoul	87.9

   (a) Quel est le type de la série statistique $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 26}$?

   (b) Donner la médiane ainsi que les premier et troisième quartiles de cette série statistique. Donner l'écart interquartile.

   (c) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

2. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'adhérents d'un club de triathlon par année.

Année	Rang de l'année (x_i)	Nombre d'adhérents (y_i)
2014	1	295
2015	2	282
2016	3	270
2017	4	250
2018	5	248
2019	6	255
2020	7	240
2021	8	237
2022	9	240

   (a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{1\leqslant i\leqslant 9}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour une année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 30 adhérents.

   (b) Calculer la moyenne et la variance du nombre d'adhérents.

   (c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

(e) En déduire une prévision du nombre d'adhérents en 2030.

Exercice 2 : Etude de fonctions

Partie 1 :

Soit a un réel. On définit la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_a(x) = e^{ax}.$$

1. Justifier que h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Rappeler la définition de h_a est dérivable en 0.
3. En déduire que
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a.$$

Partie 2 :

Soit n un entier naturel, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{2n+1} e^{-(2n+1)|x|}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$.
2. Donner pour tout réel x le signe de $f_n(x)$.
3. Justifier que pour tout entier naturel n, f_n est dérivable en 0 et donner $f_n'(0)$.
4. (a) En déduire que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$f_0'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ (1+x)e^{x} \text{ si } x < 0 \\ f_0'(0) = 1 \end{cases}$$
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f_0.
   (c) Donner une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_0$ au point d'abscisse 0.
   (d) f_0' est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable sur $\mathbb{R}$?
5. Dans cette question on suppose que n est un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour tout réel x l'expression de $f_n'(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f_n.
   (c) Montrer que l'équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 0 ne dépend pas de n.
6. (a) On considère la fonction p définie sur $[0, +\infty[$ par
$$p(x) = x^2 - e^{2x}$$
   En dérivant deux fois la fonction p, démontrer que p est une fonction strictement négative sur $[0, +\infty[$.

(b) En déduire que
$$\forall x \in [0, +\infty[, x^2 e^{-2x} < 1.$$

(c) On considère la fonction $\tilde{p}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{p}(x) = x^2 e^{-2|x|}$. Comparer pour tout x réel $\tilde{p}(-x)$ et $\tilde{p}(x)$ puis en déduire que
$$\forall x \in]-\infty, 0], x^2 e^{2x} < 1.$$

(d) Soit x un réel, montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante si x est nul, strictement décroissante si x est un réel strictement positif et strictement croissante si x est un réel strictement négatif.

(e) Soit n un entier naturel. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$?

(f) Tracer, dans un même repère orthogonal les allures de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ ainsi que T_0 et T_1. On prendra en ordonnée 10 cm pour 0.5 et en abscisse 4 cm pour une unité. On placera aussi les tangentes horizontales.

Partie 3 :

Dans cette partie n est un entier naturel non nul. On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g_n(x) = \alpha_n e^{-n|x|}$$
avec α_n une constante réelle.

1. Justifier que g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|x|}dx$ converge et déterminer sa valeur.
3. En déduire la valeur de α_n pour que g_n soit une densité de probabilité.On prendra dorénavant cette valeur pour α_n.
4. Soit X_n une variable aléatoire qui admet g_n comme densité.
   (a) On note G_n la fonction de répartition de X_n. Déterminer pour x réel l'expression de $G_n(x)$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(X_n > \frac{2}{3})$.
   (c) Montrer que X_n admet une espérance et une variance et les déterminer.

Partie 4 :

Soit n un entier naturel. On considère la fonction φ_n définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\varphi_n(x) = \int_0^{2x} t^n e^{-t} dt.$$

1. Déterminer pour tout réel x positif l'expression de $\varphi_0(x)$ et de $\varphi_1(x)$
2. Justifier qu'il existe une fonction F_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que
$$\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^{2x} t^n e^{-t} dt = F_n(2x) - F_n(0).$$
3. En déduire que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer pour tout réel x positif l'expression de $\varphi_n'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de φ_n sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Probabilités.

Les différentes parties sont indépendantes.

Partie 1 : Epreuves de triathlon.

Dans cette partie, on donnera les résultats numériques à 10^{-3} près. Le triathlon est composé de trois disciplines et les disciplines s'enchainent suivant cet ordre : natation, cyclisme et course à pied. On s'intéresse à une compétition de triathlon. Deux formats sont proposés : un triathlon olympique et un triathlon half ironman. Sur le format olympique, les inscriptions sont nécessairement individuelles tandis que pour l'half ironman on peut s'inscrire soit en individuel soit en relais. Les deux épreuves ont lieu en même temps donc un triathlète ne peut être que sur l'une des deux épreuves. Lorsqu'un triathlète parvient à finir un triathlon on dit qu'il est finisher.
On dispose des informations suivantes :

- Dans 65% des cas le triathlète est inscrit sur le format olympique et dans ce cas la probabilité qu'il soit finisher est de 0.9.
- Dans 25% des cas le triathlète est inscrit sur le format half ironman en individuel et dans ce cas la probabilité qu'il soit finisher est de 0.5.
- Sinon le triathlète est inscrit sur le format half ironman en relais et dans ce cas la probabilité qu'il soit finisher est égale à 0.7.

On considère les évènements :

— M : le triathlète est inscrit sur le format olympique.
— L : le triathlète est inscrit sur le format half ironman
— I : le triathlète est inscrit en individuel sur le format half ironman.
— R :le triathlète est inscrit en relais sur le format half ironman.
— F : le triathlète est finisher.

1. Donner $\mathbb{P}(M)$,$\mathbb{P}(I)$,$\mathbb{P}_M(F)$,$\mathbb{P}_I(F)$ et $\mathbb{P}_R(F)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(L)$.
3. Calculer la probabilité qu'un triathlète qui est inscrit à une des deux courses soit finisher.
4. Déterminer la probabilité qu'un triathlète soit inscrit sur le format olympique et soit finisher.
5. On croise un triathlète finisher, quelle est la probabilité qu'il ait participé au format olympique ?

Partie 2 : Organisation et épreuves.

Pour 2023, l'organisation décide de maintenir ces deux formats mais uniquement en individuel. Après avoir étudié les inscriptions sur plusieurs années, l'organisation a remarqué que 75% des triathlètes s'inscrivent sur le triathlon olympique. En 2023, il y aura 500 personnes inscrites sur une des deux épreuves. Les choix des triathlètes sont indépendants les uns des autres et la probabilité qu'un triathlète s'inscrive sur le triathlon olympique est de 0.75. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de triathlètes inscrits sur le triathlon olympique.

1. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Rappeler le support de X noté $X(\Omega)$.
   (c) $\forall k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k.
   (d) Donner l'espérance et la variance de X.

2. On suppose dans cette question que l' organisation arrive à satisfaire toutes les demandes et qu'elle fait un bénéfice de 35 euros sur un triathlon olympique et de 65 euros sur un half ironman. On note B la variable aléatoire égale au bénéfice de l'organisation.
   (a) Exprimer B en fonction de X.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de B.
   (c) Donner la loi de B.
3. On suppose dans cette question que l' organisation voudrait proposer 360 places sur le triathlon olympique et 140 places sur le half ironman. On note A l'événement : « la demande d'au moins un triathlète ne serait pas satisfaite ».
   (a) Exprimer A en fonction de X.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Partie 3 : Entrainement d'un triathlète.

Dans cette partie les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un triathlète s'entraine tous les jours soit en course à pied soit en natation. Le premier jour (donc le jour 1) il a couru. De plus, on sait que pour n un entier naturel non nul,

- Si il a couru le jour n alors le jour suivant la probabilité qu'il court est de $\frac{1}{2}$ sinon il va nager.
- Si il a nagé le jour n alors la probabilité qu'il nage le jour suivant est de $\frac{2}{5}$ sinon il va courir.

On considère pour tout entier naturel n non nul les évènements :
— C_n : le nième jour le triathlète court.
— S_n : le nième jour le triathlète nage.
On note $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ la probabilité de l'évènement C_n et $s_n = \mathbb{P}(S_n)$ la probabilité de l'évènement S_n.

1. Donner c_1 puis calculer s_1,c_2 et s_2.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = -\frac{1}{10}c_n + \frac{6}{10}.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $k = -\frac{1}{10}k + \frac{6}{10}$.
4. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = c_n - k$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \frac{5}{11}$.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, donner l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire,pour tout entier naturel n non nul, l'expression de c_n en fonction de n.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Interpréter.
   (e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n$ converge-t-elle ?

Partie 4 : Meilleure performance.

Dans cette partie les résultats seront donnés à 10^{-4} près Pour s'entrainer en course à pied, le triathlète s'appuie sur sa VMA (vitesse maximale aérobie). On s'intéresse à T la variable aléatoire qui donne l'âge auquel un triathlète atteint sa meilleure VMA. On suppose que T suit une loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5.

1. Donner une expression de f_T une densité de T.
2. Soit T^* une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Donner une relation entre T^* et T.
3. Déterminer la probabilité qu'un triathlète atteigne sa meilleur VMA après 40 ans.
4. Déterminer la probabilité qu'un triathlète atteigne sa meilleur VMA entre 25 et 45 ans.
5. Sans calculs, y a-t-il plus de chances qu'un triathlète atteigne sa VMA maximale entre 30 et 45 ans ou entre 15 et 30 ans ?

Intégrale $\Phi(x)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000