Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

— L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

— Trois feuilles de papier millimétré sont fournies avec l'énoncé.

— Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.

— Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.

— La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

— Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (Âge des mères à la naissance du premier enfant)

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur l'évolution de l'âge moyen des mères à la naissance du premier enfant, l'autre sur la répartition des âges des mères.

1) Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne l'âge moyen des mères ayant donné naissance à leur premier enfant, en France, au cours de l'année considérée.

année	rang de l'année x_i	âge moyen de la mère y_i
1974	1	$24,0$
1981	8	$24,6$
1989	16	$25,9$
1998	24	$27,3$
2007	33	$27,9$
2010	36	$28,1$

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,6}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 4 années et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 2 ans.

(b) Calculer la moyenne et la variance de l'âge moyen des mères.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

(e) En déduire enfin une prévision pour l'année 2016.

(f) En quelle année peut-on estimer que l'âge moyen dépassera les 30 ans ?

2) On s'intéresse maintenant à la situation sur l'année 2010.

Le tableau suivant donne la répartition dans les différentes tranches d'âges des mères ayant donné naissance à un premier enfant en France en 2010. *(données calculées à partir de statistiques de l'INSEE)*.

âge en années	Pourcentage de mères ayant eu leur premier enfant
$[15;23[$	13%
$[23;27[$	25%
$[27;29[$	16%
$[29;31[$	16%
$[31;35[$	18%
$[35;45[$	12%

(a) Quel est le type de cette série statistique ?

(b) Tracer son histogramme.

(c) Quelles sont la ou les classes modales de cette série ?

(d) Calculer à partir de cette série statistique un encadrement de l'âge moyen des mères.

(e) Déteminer le meilleur encadrement possible de l'âge médian.

(f) Peut-on affirmer dans quelle tranche d'âge (de la mère) le pourcentage de premier enfant parmi les naissances est le plus grand ? (si oui, la déterminer ; si non, dire quels renseignements manquent.)

Exercice 2 (Étude de fonctions)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n.

Partie 1

1) Déterminer le signe de $2n^2x - n^3x^2$ en fonction de x.

2) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3) Déduire des deux questions précédentes le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$.

4) Donner le maximum de f_n sur $[0;+\infty[$ et préciser en quelle valeur il est atteint.

5) Montrer que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)^2x^2e^{-nx}\left(e^{-x} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)$$

En déduire les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ se coupent.
Puis la position relative de $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathcal{C}_n$.

6) On pose, pour tout entier n non nul, $\alpha_n = 2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
Calculer $f_1(\alpha_1)$, $f_1'(\alpha_1)$, $f_2(\alpha_1)$ et $f_2'(\alpha_1)$.

7) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unité graphique est de 5 cm, les allures de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On limitera le graphique aux abscisses positives.
On placera à chaque fois la tangente horizontale ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ aux points d'abscisse α_1.

Partie 2

On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_n : x \mapsto (n^2x^2 + 2nx + 2)e^{-nx}$$

1) Déterminer la dérivée de G_n.

2) En déduire une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x)\,dx$.
En déduire, en fonction de n, l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{2}{n}$.

Partie 3

On souhaite établir un encadrement de $f_n(\alpha_n)$.
On rappel que $\alpha_n = 2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1) Étudier les variations de φ sur $[0;1]$ définie par

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x$$

En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

2) En déduire que $\alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$.

3) Montrer de même, en posant $\psi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{2}$, que $\alpha_n \geqslant \frac{1}{n}$.

4) Déduire des résultats précédents que

$$\frac{1}{e} \leqslant f_n(\alpha_n) \leqslant \frac{4}{e^2}$$

Exercice 3 (Probabilités)

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

On s'intéresse à une usine de roulement à billes. Les billes utilisées pour la fabrication de ces roulements doivent être presque parfaitement sphériques.

Partie 1 – Production des billes.

On constate que 5% des billes présentent un défaut. Quand la bille est défectueuse, les systèmes de détection de la chaîne de production l'éliminent dans 80% des cas. Mais si la bille ne présente pas de défaut, elle est tout de même éliminée dans 4% des cas.

On prend une bille au hasard. On considère les événements suivants :

— D : « La bille présente un défaut. »

— E : « La bille est éliminée. »

1) Donner la probabilité $P(D)$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_D(E)$ et $P_{\overline{D}}(E)$.

2) Calculer la probabilité qu'une bille soit défectueuse et que les systèmes de détection l'éliminent.

3) Calculer la probabilité qu'une bille ne soit pas défectueuse et que les systèmes de détection l'éliminent.

4) En déduire la probabilité $P(E)$.

5) On prend une bille qui a été éliminée, quelle est la probabilité qu'elle ne présente pas de défaut ?

6) On prend une bille qui n'a pas été éliminée, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

Partie 2 – Assemblage des roulements.

Dans la suite, pour simplifier, on admet que les défauts surviennent de manière indépendante et concernent 1% des billes.

Chaque roulement compte 10 billes. Un roulement est défectueux dès lors qu'il contient au moins une bille défectueuse.

On tire au hasard un roulement en sortie d'usine et on considère la variable aléatoire X égale au nombre des billes de ce roulement présentant un défaut.

1) Déterminer la loi de X ?

2) Donner l'espérance et la variance de X.

3) Calculer la probabilité que le roulement soit défectueux.

4) On constate que le roulement est défectueux, calculer la probabilité qu'au moins 2 billes du roulement soient défectueuses.

Partie 3 – Contraintes financières.

L'usine expédie ses roulements par caisses de 100 à une fabrique automobile. La palette est facturée 1200€ et l'usine réalise une marge par caisse de 200€.

Le contrat stipule que l'usine devra payer une pénalité financière de 360€ pour chaque caisse contenant au moins 4 roulements défectueux.

1) On tire au hasard une caisse et on considère la variable aléatoire Y égale au nombre de roulements défectueux.

On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre 4.

(a) Calculer la probabilité qu'une caisse ne contienne aucun roulements défectueux.

(b) Montrer que la probabilité qu'une caisse occasionne une pénalité financière est environ $0,5665$.

2) On considère maintenant la variable aléatoire G égale au bénéfice réalisé sur une caisse, tiré au hasard. (Ce bénéfice tient compte de la pénalité.)

(a) À l'aide de la question précédente, donner la loi de G sous forme d'un tableau.

(b) Calculer l'espérance et la variance de G.

(c) L'usine peut-elle continuer ainsi sans renégocier son contrat avec la fabrique automobile ? (On justifiera la réponse.)

Partie 4 – Diamètre des billes et durée de vie des roulements.

1) On constate que la variable aléatoire Z, qui à une bille tirée au hasard associe son diamètre en mm, suit une loi de Laplace-Gauss (aussi appelée loi normale) de moyenne 10 et d'écart type $0,02$.

(a) Calculer la probabilité qu'une bille ait un diamètre supérieur à $10,05$mm.

(b) Si une bille a un diamètre compris entre $9,97$mm et $10,03$mm, elle est conforme au standard de production. Sinon elle est refondue.

Quelle est la probabilité qu'une bille soit conforme ?

2) L'usine annonce que la durée de vie de ses roulement en années, donnée par la variable aléatoire T, suit une loi log-normale de moyenne 3 et d'écart type $0,3$.

Calculer la probabilité qu'un roulement soit usé en moins de 10 années.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000