

C38181

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 3^{ème} année
GÉNIE MÉCANIQUE ET MÉCANIQUE
Session 2008

Épreuve de MÉCANIQUE ET AUTOMATIQUE

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail (circulaire n°99 018 du 1^{er} février 1999).

Nota. À partir d'un support commun, l'épreuve comporte deux parties totalement indépendantes :

- Mécanique générale ;
- Automatique (systèmes asservis linéaires).

Le sujet comporte 10 pages, 5 annexes dont **2 documents-réponses à rendre avec votre copie.**

Le candidat devra traiter les deux parties. Ces deux parties peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

Il est conseillé au candidat de lire attentivement le sujet en entier et d'accorder un temps sensiblement égal pour chacune des deux parties.

Les deux parties traitées seront rédigées sur des copies séparées et il faudra préciser sur chaque copie :

- le titre ;
- le repère de l'épreuve ;
- la partie de l'épreuve traitée ;
- le nombre de feuilles constituant la copie.

Vous veillerez à rendre les documents réponses avec les copies correspondantes.

INTRODUCTION

Nous proposons d'étudier partiellement le fonctionnement d'un robot à 6 axes de type « KUKA KR30 ». Ce robot est mis en situation sur la Figure 1. Il est ici utilisé dans une application de mesure sans contact.

Dans cette application, la tête de mesure est équipée d'un système de localisation (trièdre matérialisé par les trois axes en noir sur la photographie et dont la position absolue est repérée par un système d'acquisition). Ceci permet d'effectuer les mesures sur la pièce indépendamment de la précision du robot.

Pour d'autres applications, de soudage par exemple, la précision du robot revêt alors une grande importance.



Figure 1 : Mise en situation du robot

Chaque solide $S_i, i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ admet pour repère orthonormé direct lié le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (embase) et constitue le repère absolu.

Les rotations possibles, pour chacun des axes du robot, sont proposées sur la Figure 2.

L'embase (solide S_0) est fixée au sol, l'épaule (solide S_1) est en liaison pivot, d'axe $(O_0, \vec{z}_0) = (O_1, \vec{z}_1)$ et de paramètre angulaire α_1 , par rapport à l'embase.

Le bras (solide S_2) est en liaison pivot, d'axe (O_2, \vec{z}_2) et de paramètre angulaire α_2 , par rapport à l'épaule.

L'avant-bras (solide S_3) est en liaison pivot, d'axe (O_3, \vec{z}_3) (avec $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$) et de paramètre angulaire α_3 , par rapport au bras.

Le poignet est constitué de trois liaisons de type pivot :

La première est une rotation du solide S_4 autour de l'axe (O_4, \vec{z}_4) (\vec{z}_4 est orthogonal à \vec{z}_3) et de paramètre angulaire α_4 .

La seconde est une rotation du solide S_5 autour de l'axe (O_5, \vec{z}_5) (\vec{z}_5 est orthogonal à \vec{z}_4) et de paramètre angulaire α_5 .

La troisième est une rotation du solide S_6 (broche porte capteur non représentée) autour de l'axe (O_6, \vec{z}_6) (\vec{z}_6 est orthogonal à \vec{z}_5) et de paramètre angulaire α_6 .

On notera M_i les couples fournis par les actionneurs associés.

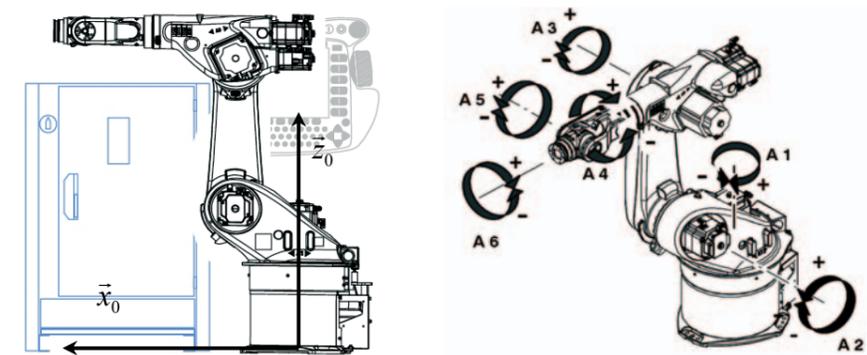


Figure 2 : Vue du robot (à gauche) et définition des rotations (à droite)

Pour la commodité du paramétrage, le point O_0 est choisi sur l'axe A_1 et sur le sol. Dans le repère absolu $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et dans la configuration définie sur la Figure 2 (à gauche), les positions des points O_i sont donnés par $\vec{O}_0\vec{O}_i = i_i\vec{x}_0 + j_i\vec{y}_0 + k_i\vec{z}_0$ que nous noterons également $\vec{O}_0\vec{O}_i = (i_i; j_i; k_i)$.

Dans cette expression, les $(i_i; j_i; k_i)$ sont exprimés en mètre :

$\vec{O}_0\vec{O}_1 = (0; 0; 0,815)$	$\vec{O}_0\vec{O}_2 = (0,350; 0; 0,815)$	$\vec{O}_0\vec{O}_3 = (0,350; 0; 1,665)$
$\vec{O}_0\vec{O}_4 = (0,810; 0; 1,810)$	$\vec{O}_0\vec{O}_5 = (1,170; 0; 1,810)$	$\vec{O}_0\vec{O}_6 = (1,34; 0; 1,810)$

Le candidat est invité, tout au long de l'épreuve, à poser toute hypothèse qu'il jugera utile (en la justifiant).

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE

1 Étude géométrique et cinématique

- 1.1 Donner le graphe des liaisons pour ce robot.
- 1.2 Quel est le nombre de mobilités de cette chaîne articulée ?
- 1.3 Existe-t-il des mobilités internes ? Justifier.
- 1.4 Proposer un schéma cinématique minimal pour ce robot.

Nous nous plaçons dans le cas où seuls les axes A_2 , A_3 et A_5 sont activés. Dans ce cas, le mouvement est plan et le schéma cinématique ainsi que le paramétrage est présenté sur la Figure 3.

Comme certains degrés de libertés sont bloqués, nous sommes amenés à considérer le solide S_2 , l'ensemble $E_3 = S_3 + S_4$ et l'ensemble $E_5 = S_5 + S_6$.

Nous définissons le point L lié au solide S_6 . Sa position est donnée par $\vec{O}_5 L = l\vec{x}_5$.

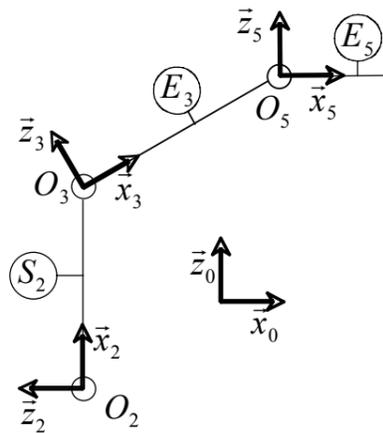
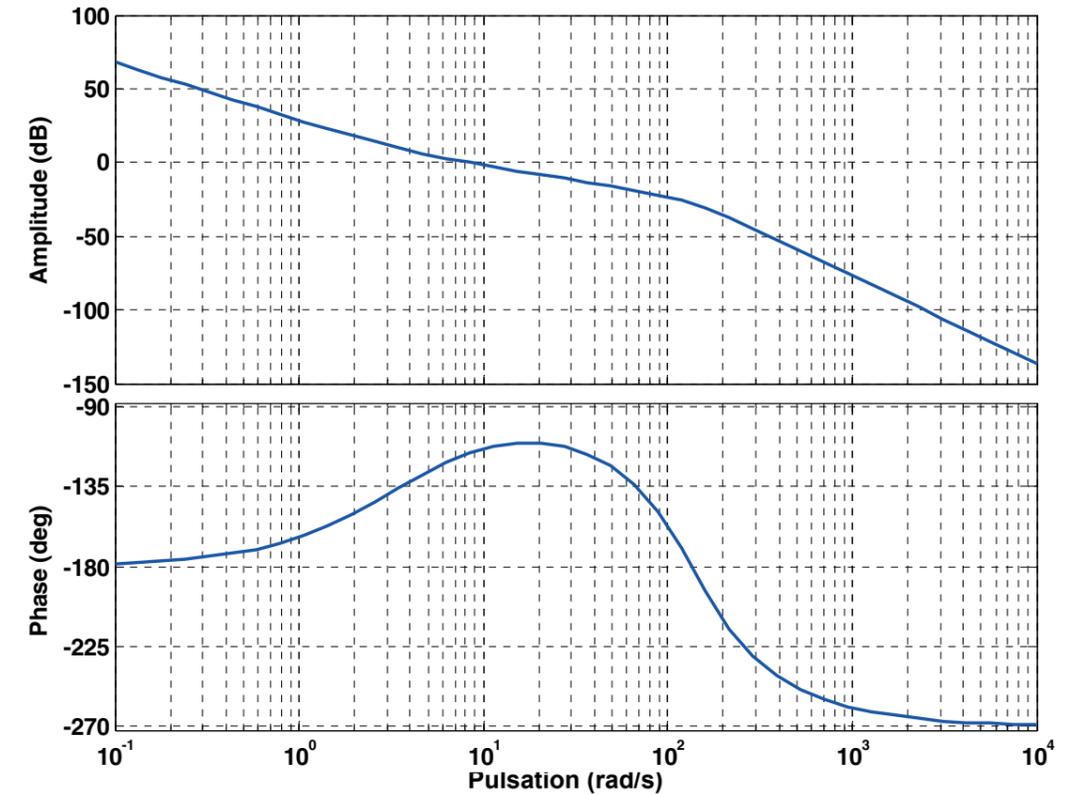


Figure 3 : schéma cinématique et repérage pour la question 1.5

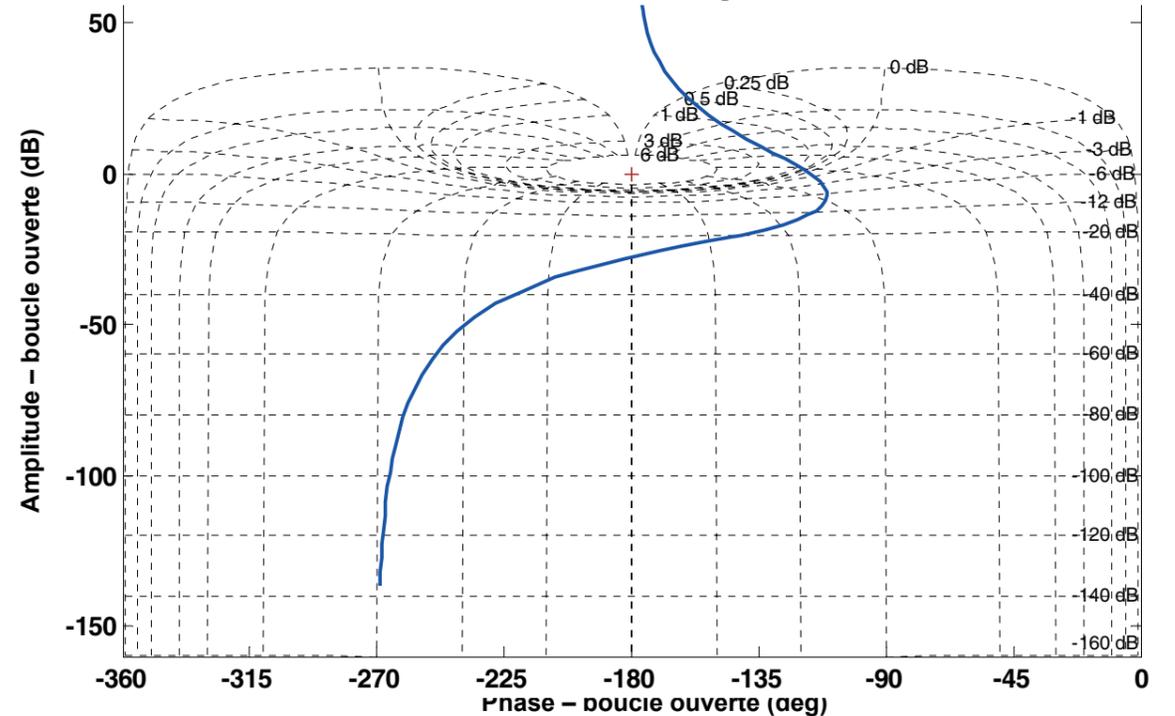
- 1.5 Déterminer la vitesse du point L dans le repère R_0 en fonction de $\alpha_2 = \text{ang}(\vec{x}_0, \vec{x}_2)$, $\alpha_3 = \text{ang}(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ et $\alpha_5 = \text{ang}(\vec{x}_3, \vec{x}_5)$.

Annexe 5

Tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan de Bode



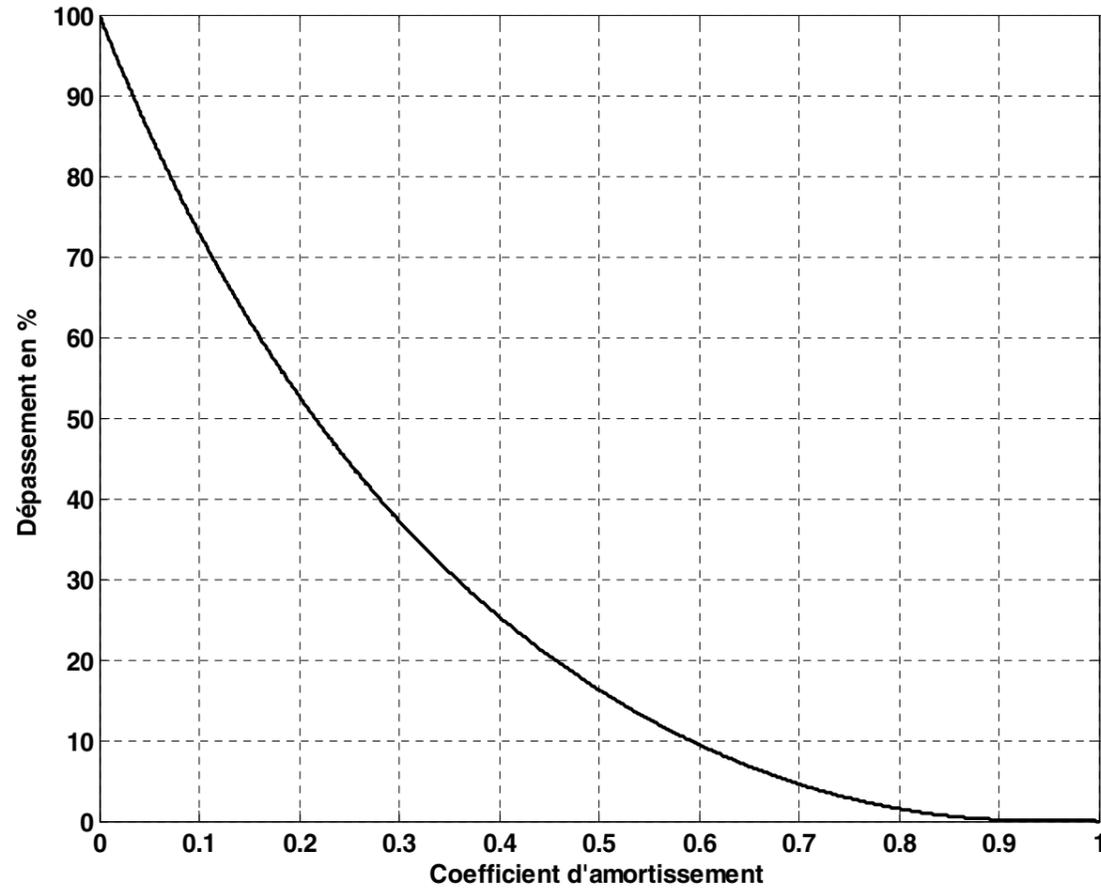
Tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols



Annexe 3

Dépassement en régime indiciel en fonction de l'amortissement :

$$D\% = 100.e^{-\frac{\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



2 Étude dynamique et choix de moteur

Dans toute cette partie dynamique, seuls les axes A_2 et A_3 sont activés par des moteurs fournissant des couples M_2 et M_3 . Le point O_2 est donc fixe.

On note E_3 , l'ensemble constitué de la réunion des solides S_3 , S_4 , S_5 et S_6 .

On propose, sur la Figure 4, le schéma cinématique plan retenu pour toute cette partie dynamique 2 ainsi que le repérage associé.

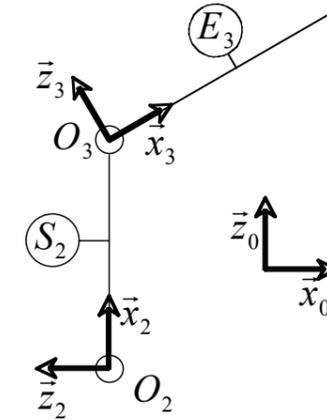


Figure 4 : schéma cinématique et repérage pour la partie dynamique 2

On note G_2 le centre de gravité du solide S_2 . Dans le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, on a la relation $\vec{O}_2G_2 = (a_2, b_2, c_2) = (0, 42; 0; 0)$. En ce point G_2 , la matrice d'inertie du solide S_2 s'écrit :

$$\underline{\underline{I}}_{G_2}^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

On donne $A_2 = 0,5 \text{ kgm}^2$, $B_2 = C_2 = 5,3 \text{ kgm}^2$. La masse m_2 du solide S_2 est $m_2 = 55 \text{ kg}$.

On note G_3 le centre de gravité de l'ensemble E_3 . Dans le repère $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, on a la relation $\vec{O}_3G_3 = (a_3, b_3, c_3) = (0, 18; 0; 0, 10)$. En ce point G_3 , la matrice d'inertie de l'ensemble E_3 s'écrit :

$$\underline{\underline{I}}_{G_3}^{(E_3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

On donne $A_3 = 0,57 \text{ kgm}^2$, $B_3 = 6,80 \text{ kgm}^2$ et $C_3 = 7,04 \text{ kgm}^2$. La masse m_3 de l'ensemble E_3 est $m_3 = 50 \text{ kg}$.

- 2.1 Exprimer, en O_3 , le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble E_3 et projeté sur \vec{y}_0 .
- 2.2 Exprimer, en O_2 et projeté sur \vec{y}_0 , le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble constitué du solide S_2 et de l'ensemble E_3 .
- 2.3 Exprimer, à l'aide des expressions des deux questions précédentes, les relations qui permettent de calculer les couples M_2 et M_3 en fonction des angles α_2 et α_3 .

On bloque maintenant l'angle α_2 . La trajectoire imposée à l'angle α_3 est définie par un aller de $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$ à $\alpha_3 = 0$ suivi d'un retour de $\alpha_3 = 0$ à $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$. Durant ce trajet, l'angle α_3 suit une loi trapézoïdale de vitesse comme précisé sur la Figure 5.

Le temps de cycle total est $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 2,4s$ avec $t_1 + t_2 + t_3 = t_4 + t_5 + t_6$ et $t_1 = t_3 = t_4 = t_6$. La vitesse de rotation α_{3nom} est $\alpha_{3nom} = 100^\circ/s$. On utilise un réducteur de rapport de réduction $r = 70$ en sortie du moteur. On néglige les pertes par frottement au niveau de la liaison et du réducteur.

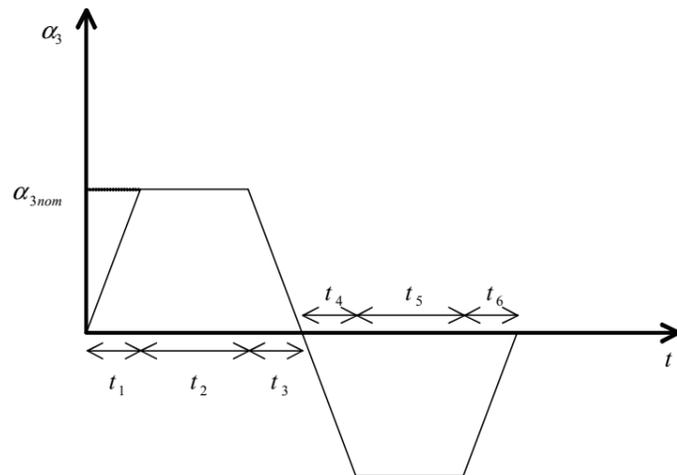


Figure 5 : loi trapézoïdale de vitesse pour l'angle α_3

- 2.4 Calculer l'accélération α_3 sur chacune des six phases j du cycle.
- 2.5 Calculer le couple moteur nécessaire M_{3j} sur chacune des six phases j du cycle.

Les tâches effectuées par un actionneur dans un environnement industriel conduisent rarement à un fonctionnement au point nominal. Dans le cas, comme dans le cycle proposé ici, où le fonctionnement fait intervenir des phases transitoires d'accélération et de régime permanent, les constructeurs préconisent de calculer le couple thermique équivalent sur un cycle. Ce couple thermique équivalent est donné par :

$$M_{eqth} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n M_j^2 t_j}{T}}$$

- 2.6 Calculer numériquement M_{eqth} .

Annexe 1

Tableaux des caractéristiques nominales de servomoteurs synchrones – Série MD-KS

Principales caractéristiques mécaniques :

Type de moteur	n_N [min ⁻¹]	M_0 [Nm]	M_{max} [Nm]	M_N [Nm]	P_N [kW]	I_0 [A]	I_N [A]	I_{max} [A]	U_N [V]	f_N [Hz]	η [%]
MDSKS□□036-13	4000	0.7	3.1	0.6	0.25	0.9	0.9	5.0	245	200	66
MDSKS□□036-23	4000	1.5	7.2	1.3	0.54	1.3	1.1	7.5	345	200	83
MDSKS□□056-23	3800	3.2	11.6	2.8	1.10	2.6	2.3	10.0	330	190	85
MDSKS□□056-33	4000	4.7	17.2	4.2	1.80	4.0	3.6	16.0	325	200	87
MDSKS□□071-03	3400	6.7	23.6	5.7	2.00	4.9	4.2	19.0	330	170	85
MDSKS□□071-13	3700	10.0	35.2	8.3	3.20	8.4	7.0	32.0	325	185	82
MDSKS□□071-33	3600	14.7	52.0	12.3	4.60	11.9	10.0	45.0	325	180	82

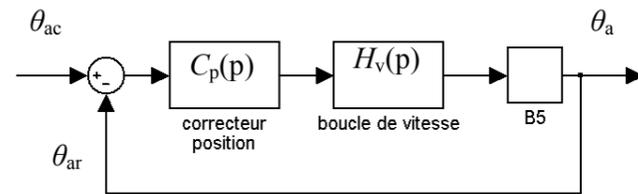
©Lenze

Principales caractéristiques électriques :

Type de moteur	$J_M^{(1)}$ [kgcm ²]	$kE_{LL 150^\circ C}$ [V/1000 min ⁻¹]	$R_{UV 20^\circ C}$ [Ω]	$R_{UV 150^\circ C}$ [Ω]	L_{st} [mH]	$kt_0 150^\circ C$ [Nm/A]	$n_{max}^{(2)}$ [min ⁻¹]	$m^{(3)}$ [kg]	Prise
MDSKS□□036-13	0.22	47.2	29.3	36.6	47.4	0.72	8000	1.5	EWS0001
MDSKS□□036-23	0.36	74.5	28.7	38.7	39.9	1.2	8000	2.1	EWS0001
MDSKS□□056-23	1.20	78.1	10.1	13.6	17.1	1.23	5500	5.3	EWS0001
MDSKS□□056-33	1.80	74.6	5.1	6.9	10.8	1.18	5500	6.3	EWS0001
MDSKS□□071-03	6.00	93.0	3.4	4.6	10.6	1.37	5000	8.9	EWS0001
MDSKS□□071-13	8.00	84.5	1.5	2.1	5.3	1.19	5000	10.9	EWS0001
MDSKS□□071-33	10.00	88.2	1.1	1.6	5.8	1.24	5000	13.0	EWS0001

©Lenze

5.3 En considérant dans la suite du sujet que la boucle de position est à retour unitaire ($K_{rp}=1$), montrer que le schéma-bloc précédent se réduit à :



On rappelle que $H_v(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ est la fonction de transfert de la boucle de vitesse ; pour la suite, $H_v(p)$ est arrondie à $\frac{0,77}{1+0,01.p+5,3.10^{-5}.p^2}$.

Dans un premier temps, $C_p(p)$ est un gain pur noté K_{cp} .

- 5.4 Déterminer la valeur de K_{cp} à appliquer pour avoir une marge de phase de 45° .
 5.5 Pour un tel réglage, réaliser sur le document réponse (annexe 4) le tracé asymptotique et le tracé approché dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour la boucle de position.

Positionner sur le tracé les marges de gain et de phase en indiquant leur valeur.

Conclure quant à la stabilité de $H_p(p)$.

- 5.6 Calculer l'erreur statique et l'erreur de traînage pour respectivement un échelon unité et une rampe $\theta_{ac}(t)=\alpha.t$ ($\alpha=constante$).

Dans un second temps, $C_p(p)$ est remplacé par un autre correcteur à priori inconnu.

L'annexe 5 regroupe le tracé de la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte ainsi obtenue dans les plans de Bode et de Black-Nichols.

- 5.7 On cherche à identifier $C_p(p)$: par l'analyse des différents tracés fournis, justifier le type de correcteur implanté ; écrire la fonction de ce correcteur sous forme littérale puis identifier les valeurs numériques.
 5.8 Commenter le réglage et le choix de ce correcteur sur le comportement du robot vis-à-vis des critères suivants : précision vis-à-vis de la consigne de position et du couple résistant, rapidité, stabilité et dépassement.
 5.9 Proposer un tracé approché pour la réponse temporelle du système à une consigne de position de type échelon unitaire. Conclure.

DEUXIÈME PARTIE

AUTOMATIQUE – SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES

Suite au dimensionnement de moteur établi pour l'axe 2 dans la première partie, nous appliquons la même méthodologie à l'axe 1. Le résultat de l'étude nous conduit au choix du moteur référence « MDSKS□□071-33 » (annexe 1). On s'intéresse maintenant à l'étude de l'asservissement de cet axe (axe 1).

Remarque : dans le sujet, les expressions des valeurs numériques sont demandées dans les unités du Système International.

3 Modélisation du moteur

On rappelle les équations pour un modèle de moteur à courant continu :

$$\begin{cases} u(t) = e(t) + R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ e(t) = Ke.\omega_m(t) \\ c_m(t) = Kt.i(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $u(t)$ est la tension appliquée aux bornes du moteur, $e(t)$ la force électromotrice, $i(t)$ le courant circulant dans le moteur, R et L respectivement la résistance et l'inductance de l'induit, $c_m(t)$ et $\omega_m(t)$ respectivement le couple électromagnétique du moteur et sa vitesse de rotation, Ke et Kt respectivement les constantes de tension et de couple.

L'écriture de l'équilibre dynamique de l'arbre moteur permet d'arriver à l'équation suivante :

$$J. \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - f.\omega_m(t) \quad (2)$$

où J est l'inertie équivalente (effecteur, poignet, bras, coude, épaule, moteurs...) ramenée sur l'arbre moteur, $c_r(t)$ le couple résistant créé par la charge entraînée sur l'axe 2 et f le frottement visqueux.

- 3.1 En considérant des conditions initiales nulles, appliquer la transformée de Laplace aux équations (1) et (2) ; la lettre « p » sera utilisé comme variable de Laplace ; dans le domaine de Laplace, les variables seront notées en majuscule.
 3.2 Compléter le schéma-bloc donné en annexe 2 en précisant pour chaque bloc (B1 à B4), les entrées-sorties (natures et dimensions) ainsi que l'expression de la fonction de transfert sous forme littérale.
 3.3 Exprimer littéralement les fonctions de transfert $H_{m1}(p)$ et $H_{m2}(p)$ de l'équation (3) sous forme canonique ($H(p) = \frac{\dots}{1+\dots p+\dots p^2}$) ; justifier les calculs.

$$\Omega_m(p) = H_{m1}(p).U(p) - H_{m2}(p).C_r(p) \quad (3)$$

On s'intéresse maintenant à $H_{m1}(p)$.

3.4 Exprimer le gain G_m , le coefficient d'amortissement ξ_m , et la pulsation propre non amortie du système ω_{nm} de $H_{m1}(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur et des paramètres mécaniques (R, L, K_e, K_t, J et f).

3.5 Effectuer les applications numériques en portant une attention particulière aux unités (K_e est exprimé en $V/(1000.tr/min)$; on choisira la valeur de résistance d'induit R donnée pour $20^\circ C$; l'inertie équivalente du système global ramenée sur l'arbre moteur J vaut $0,0417kg.m^2$ et les frottements visqueux $8.10^{-3}N.m/(rad/s)$).

3.6 Exprimer littéralement les termes τ_m et τ_e tels que $H_{m1}(p) = \frac{G_m}{1 + \tau_m.p + \tau_e.p^2}$

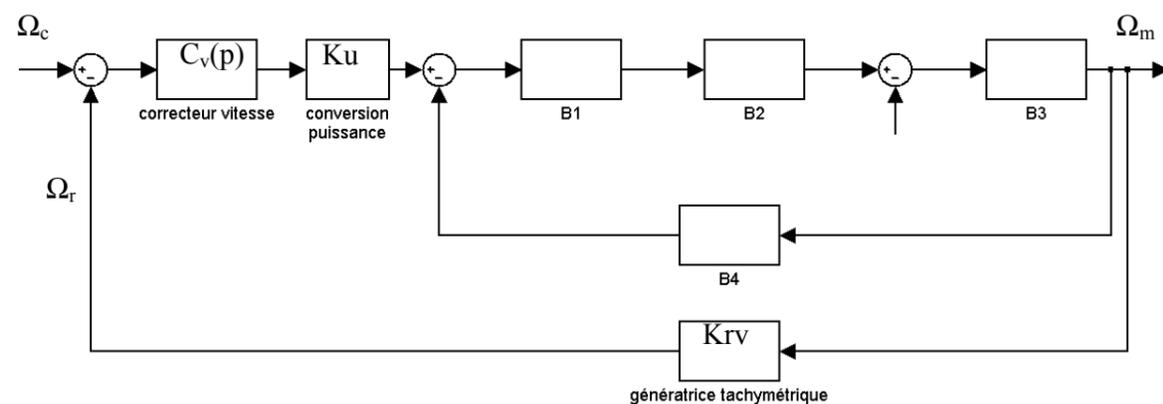
En négligeant les frottements visqueux, faire les applications numériques puis donner la signification des termes τ_m et τ_e .

3.7 Expliquer dans quelles conditions le système peut s'écrire sous la forme

$$H_{m1}(p) = \frac{G_m}{(1 + \tau_m.p)(1 + \tau_e.p)}$$

4 Etude de l'asservissement en vitesse

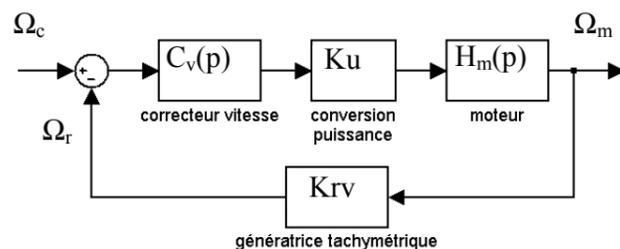
L'asservissement en vitesse est réalisé à l'aide d'une génératrice tachymétrique montée sur le moteur comme le décrit le schéma suivant :



où Ω_c représente la vitesse de consigne, Ω_r l'image de la vitesse mesurée délivrée par la génératrice tachymétrique de gain K_{rv} , K_u le gain d'amplification en puissance et $C_v(p)$ le correcteur de la boucle de vitesse.

4.1 En sortie du correcteur de vitesse, la tension de commande varie dans la plage $[-10V; +10V]$. Sachant que la tension maximale aux bornes du moteur est de $400V$, calculer K_u .

En l'absence de perturbation ($C_r(p)=0$), le schéma précédent se réduit en :



avec $H_m(p)$ arrondi à $\frac{1,18}{1 + 0,044.p + 2,3.10^{-4}.p^2}$.

On choisit pour le correcteur $C_v(p)$ un gain pur de valeur K_{cv} .

En faisant l'hypothèse d'un retour unitaire ($K_{rv}=1$), on veut déterminer la valeur de K_{cv} afin de satisfaire les critères suivants : temps de montée minimal, dépassement indiciel de 5% maximum.

4.2 Pour cela, exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_v(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$

sous forme littérale et canonique.

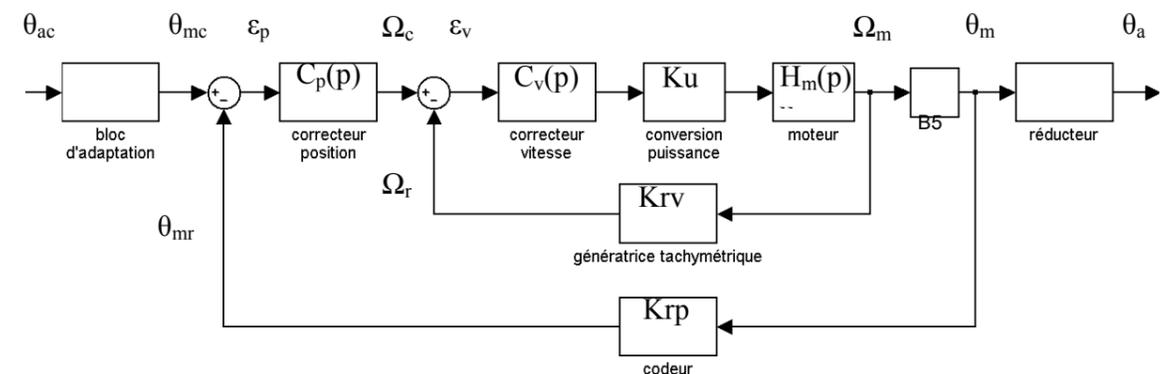
4.3 En déduire l'expression du gain G_v , du coefficient d'amortissement ξ_v , et la pulsation propre non amortie de la boucle de vitesse ω_{nv} .

4.4 Calculer la valeur de K_{cv} à partir des deux critères mentionnés ; faire les applications numériques pour G_v , ξ_v et ω_{nv} .

4.5 Comparer la valeur de ω_{nv} à celle trouvée précédemment pour ω_{nm} ; conclure quant à l'intérêt de la boucle de vitesse.

5 Etude de l'asservissement en position

L'application de mesure sans contact de pièce nécessite rapidité et précision de positionnement et d'orientation du capteur laser par rapport à la pièce à mesurer. Une boucle d'asservissement de position est donc insérée dans la structure :



avec θ_{ac} la consigne de position angulaire de l'axe du bras, θ_{mc} la consigne de position angulaire équivalente de l'arbre moteur, θ_{mr} l'image de la position angulaire réelle de l'axe du bras retournée par le codeur, ε_p l'écart de position, θ_m la position réelle du moteur, θ_a la position réelle du bras et K_{rp} le gain du codeur.

5.1 Donner la fonction de transfert du bloc B5.

5.2 Quelle est l'utilité du bloc d'adaptation positionné en amont de la boucle de position ? Proposer sous forme littérale une fonction de transfert en détaillant votre réponse.

On s'intéresse maintenant à la fonction de transfert définie par $H_p(p) = \frac{\theta_{ac}(p)}{\theta_a(p)}$.