

C38211

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 3^{ème} année

INFORMATIQUE

Session 2008

Épreuve d'INFORMATIQUE 1

Durée : 5 heures

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

INFORMATIQUE I

Ce sujet comporte trois sections. La première section établit des propriétés élémentaires sur les connexions de Galois utilisées en interprétation abstraite de programmes. La seconde section s'intéresse au domaine abstrait des matrices de différences bornées. La dernière section étudie la mise en œuvre algorithmique de ce domaine abstrait.

La notation tiendra compte de la rigueur des raisonnements et de la clarté des explications. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes. Il n'est pas nécessaire d'utiliser la notation fléchée pour les vecteurs dans les réponses aux questions.

1 Préliminaires

Considérons un ensemble U et une relation binaire $R \subseteq U \times U$. On écrit simplement uRu' lorsque $(u, u') \in R$. On dit que R est *réflexive* (resp. *symétrique*, *antisymétrique*, *transitive*) si uRu (resp. uRv implique vRu , uRv et vRu implique $u = v$, uRv et vRw implique uRw) pour tous $u, v, w \in U$.

Un *ordre partiel* sur un ensemble U est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive sur U . Etant donné un ordre partiel $\sqsubseteq$ sur U , on note $\sqsupseteq$ l'ordre partiel dual sur U défini par $u \sqsupseteq v$ si $v \sqsubseteq u$, et on écrit $\not\sqsubseteq$ la relation binaire $(U \times U) \setminus \sqsubseteq$ sur U . Un *ensemble partiellement ordonné* est un couple $(D, \sqsubseteq)$ où D est un ensemble et $\sqsubseteq$ est un ordre partiel sur D .

Soient $(D_1, \sqsubseteq_1)$ et $(D_2, \sqsubseteq_2)$ deux ensembles partiellement ordonnés. Une fonction $f : D_1 \rightarrow D_2$ est dite *croissante* si pour tous $d, e \in D_1$, on a : $d \sqsubseteq_1 e$ implique $f(d) \sqsubseteq_2 f(e)$.

Considérons un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{L} = (D, \sqsubseteq)$ et soit $X \subseteq D$. Un *minorant* (resp. *majorant*) de X dans $\mathcal{L}$ est un élément $d \in D$ tel que $d \sqsubseteq x$ (resp. $x \sqsubseteq d$) pour tout $x \in X$. Une *borne inférieure* (resp. *supérieure*) de X dans $\mathcal{L}$ est un minorant (resp. majorant) d de X dans $\mathcal{L}$ tel que $e \sqsubseteq d$ (resp. $d \sqsubseteq e$) pour tout minorant (resp. majorant) e de X dans $\mathcal{L}$. Si X admet une borne inférieure (resp. supérieure) dans $\mathcal{L}$ alors elle est unique et on la note $\inf_{\mathcal{L}} X$ (resp. $\sup_{\mathcal{L}} X$).

Un *treillis complet* est un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{L} = (D, \sqsubseteq)$ où tout sous-ensemble $X \subseteq D$ admet une borne inférieure et une borne supérieure. Le *plus petit élément* de $\mathcal{L}$ est $\perp_{\mathcal{L}} = \inf_{\mathcal{L}} D$ et le *plus grand élément* de $\mathcal{L}$ est $\top_{\mathcal{L}} = \sup_{\mathcal{L}} D$.

Soit $\mathcal{L} = (D, \sqsubseteq)$ un ensemble partiellement ordonné et f une fonction de D dans D . Un *point fixe* de f est un élément $d \in D$ tel que $d = f(d)$. Un *plus petit* (resp. *grand*) *point fixe* de f dans $\mathcal{L}$ est un point fixe d de f tel que $d \sqsubseteq e$ (resp. $e \sqsubseteq d$) pour tout point fixe e de f . Si f admet un plus petit (resp. grand) point fixe dans $\mathcal{L}$ alors il est unique et on le note¹ $\text{lfp}_{\mathcal{L}} f$ (resp. $\text{gfp}_{\mathcal{L}} f$).

Notation. Pour simplifier l'écriture, on pourra noter $\inf X$ (resp. $\sup X$, $\perp$, $\top$, $\text{lfp } f$, $\text{gfp } f$) au lieu de $\inf_{\mathcal{L}} X$ (resp. $\sup_{\mathcal{L}} X$, $\perp_{\mathcal{L}}$, $\top_{\mathcal{L}}$, $\text{lfp}_{\mathcal{L}} f$, $\text{gfp}_{\mathcal{L}} f$) lorsque l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{L}$ se comprend d'après le contexte.

On note $\mathbb{P}(U)$ l'ensemble des parties d'un ensemble U . Rappelons que pour tout ensemble U , le couple $(\mathbb{P}(U), \subseteq)$ forme un treillis complet, avec $\perp = \emptyset$, $\top = U$, $\inf X = \bigcap X$ et $\sup X = \bigcup X$ pour tout $X \in \mathbb{P}(U)$.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$ et on écrit $\leq$ l'ordre partiel usuel sur $\mathbb{R}$. Rappelons que l'ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas un treillis complet. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'extension de $\mathbb{R}$ définie par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. L'ordre partiel $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est étendu à $\overline{\mathbb{R}}$ par $y \not\leq -\infty \leq x \leq +\infty \not\leq z$ pour tous $x \in \overline{\mathbb{R}}$ et $y, z \in \mathbb{R}$. L'ensemble partiellement ordonné $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est un treillis complet. L'addition sur $\mathbb{R}$ est étendue à $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\begin{aligned} x + (+\infty) &= (+\infty) + x &= +\infty &\text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ y + (-\infty) &= (-\infty) + y &= -\infty &\text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ (+\infty) + (-\infty) &= (-\infty) + (+\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

2 Connexions de Galois

Cette section est consacrée à l'étude de propriétés élémentaires sur les connexions de Galois. Les connexions de Galois permettent de mettre en œuvre des méthodes d'analyse approchée de programmes, où les valeurs "concrètes" prises par les variables du programme sont remplacées par des valeurs abstraites plus simples à manipuler d'un point de vue algorithmique.

Une *connexion de Galois* d'un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{Z} = (D_{\mathcal{Z}}, \sqsubseteq_{\mathcal{Z}})$ vers un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{A} = (D_{\mathcal{A}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ est un couple $\langle \alpha, \gamma \rangle$ de fonctions, où $\alpha : D_{\mathcal{Z}} \rightarrow D_{\mathcal{A}}$ et $\gamma : D_{\mathcal{A}} \rightarrow D_{\mathcal{Z}}$, vérifiant pour tous $a \in D_{\mathcal{A}}$ et $z \in D_{\mathcal{Z}}$ la condition suivante :

$$\alpha(z) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a \quad \text{si et seulement si} \quad z \sqsubseteq_{\mathcal{Z}} \gamma(a)$$

On écrit $\mathcal{Z} \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} \mathcal{A}$ lorsque $\langle \alpha, \gamma \rangle$ est une connexion de Galois de $\mathcal{Z}$ vers $\mathcal{A}$. Intuitivement $\mathcal{Z}$ représente un domaine *concret* et $\mathcal{A}$ représente un domaine *abstrait*. La fonction α , appelée *fonction d'abstraction*, permet d'abstraire une valeur concrète en une valeur abstraite et la fonction γ , appelée *fonction de concrétisation*, permet de concrétiser une valeur abstraite en une valeur concrète.

Exemple. Considérons le domaine concret $(\mathbb{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$. Chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut être sur-approximé par l'intervalle des réels compris entre sa borne inférieure l et sa borne supérieure u . On choisit alors comme domaine abstrait l'ensemble partiellement ordonné

¹La notation suit la terminologie anglo-saxonne : *lfp* pour "least fix-point" (plus petit point fixe) et *gfp* pour "greatest fix-point" (plus grand point fixe).

$(\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \preceq)$ où $\preceq$ est défini par : $(l, u) \preceq (l', u')$ si $l' \leq l$ et $u \leq u'$. Intuitivement chaque couple (l, u) dans $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ représente l'intervalle des réels compris entre l et u . Cette correspondance est formalisée par la connexion de Galois $(\mathbb{P}(\mathbb{R}), \subseteq) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}, \preceq)$ où α et γ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma((l, u)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid l \leq x \leq u\} && \text{pour tous } l, u \in \overline{\mathbb{R}} \\ \alpha(X) &= (\inf_{(\overline{\mathbb{R}}, \leq)} X, \sup_{(\overline{\mathbb{R}}, \leq)} X) && \text{pour tout } X \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

On considère dans toute la suite de cette section deux ensembles partiellement ordonnés $\mathcal{A} = (D_{\mathcal{A}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}})$ et $\mathcal{Z} = (D_{\mathcal{Z}}, \sqsubseteq_{\mathcal{Z}})$.

Question 1 Soient deux fonctions $\alpha : D_{\mathcal{Z}} \rightarrow D_{\mathcal{A}}$ et $\gamma : D_{\mathcal{A}} \rightarrow D_{\mathcal{Z}}$. Montrer que :

$$\mathcal{Z} \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \mathcal{A} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} z \sqsubseteq_{\mathcal{Z}} \gamma \circ \alpha(z) & \text{pour tout } z \in D_{\mathcal{Z}}, \text{ et} \\ \alpha \circ \gamma(a) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a & \text{pour tout } a \in D_{\mathcal{A}}, \text{ et} \\ \alpha \text{ et } \gamma \text{ sont croissantes} \end{cases}$$

On suppose dans toute la suite de cette section que $\langle \alpha, \gamma \rangle$ est une connexion de Galois de $\mathcal{Z}$ vers $\mathcal{A}$.

Question 2 Montrer que les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\alpha = \alpha \circ \gamma \circ \alpha \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma \circ \alpha \circ \gamma$$

En déduire que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) α est surjective
- ii) γ est injective
- iii) $\alpha \circ \gamma(a) = a$ pour tout $a \in D_{\mathcal{A}}$

Comme le montre la question suivante, dans une connexion de Galois entre deux treillis complets, la donnée de l'une des deux fonctions de la connexion détermine l'autre de manière unique.

Question 3 Montrer que si $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{A}$ sont des treillis complets, alors les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \inf_{\mathcal{A}} \{a \in D_{\mathcal{A}} \mid z \sqsubseteq_{\mathcal{Z}} \gamma(a)\} && \text{pour tout } z \in D_{\mathcal{Z}} \\ \gamma(a) &= \sup_{\mathcal{Z}} \{z \in D_{\mathcal{Z}} \mid \alpha(z) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a\} && \text{pour tout } a \in D_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

En général la fonction de concrétisation γ n'est pas injective : plusieurs valeurs abstraites peuvent avoir la même concrétisation. La *forme normale* d'une valeur abstraite a , notée $\text{nf}(a)$, est la valeur abstraite $\alpha \circ \gamma(a)$. On dit qu'une valeur abstraite est *en forme normale* lorsqu'elle est égale à sa forme normale.

Question 4 Montrer que pour tous $a, b \in D_{\mathcal{A}}$, les formes normales de a et de b vérifient les quatre assertions suivantes :

- i) $\gamma(a) = \gamma(b)$ si et seulement si $\text{nf}(a) = \text{nf}(b)$.
- ii) $\gamma(a) \sqsubseteq \gamma(b)$ si et seulement si $\text{nf}(a) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} b$.
- iii) $\gamma(\text{nf}(a)) = \gamma(a)$ et $\text{nf}(\text{nf}(a)) = \text{nf}(a) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a$.
- iv) si $\mathcal{A}$ est un treillis complet alors $\text{nf}(a) = \inf_{\mathcal{A}} \{a' \in D_{\mathcal{A}} \mid \gamma(a') = \gamma(a)\}$.

On s'intéresse dans la fin de cette section à l'approximation de plus petits points fixes par des connexions de Galois. On commence par démontrer une variante simplifiée du Théorème de Knaster-Tarski.

Question 5 Soit $\mathcal{L} = (D, \sqsubseteq)$ un treillis complet. Montrer que toute fonction $f : D \rightarrow D$ croissante admet un plus petit point fixe donné par :

$$\text{lfp}_{\mathcal{L}} f = \inf_{\mathcal{L}} \{d \in D \mid f(d) \sqsubseteq d\}$$

La question suivante montre que sous certaines conditions, on peut sur-approximer un plus petit point fixe dans le domaine concret par un plus petit point fixe dans le domaine abstrait.

Question 6 Supposons que $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{A}$ sont des treillis complets. Montrer que pour toute fonction $f : D_{\mathcal{Z}} \rightarrow D_{\mathcal{Z}}$ croissante, on a :

$$\alpha(\text{lfp}_{\mathcal{Z}} f) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} \text{lfp}_{\mathcal{A}}(\alpha \circ f \circ \gamma)$$

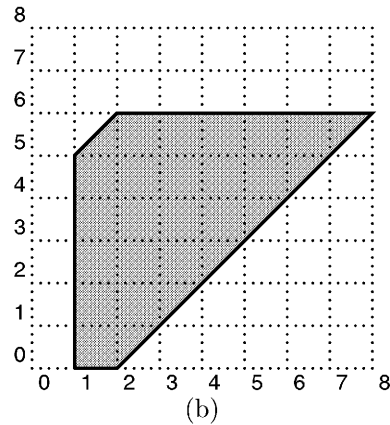
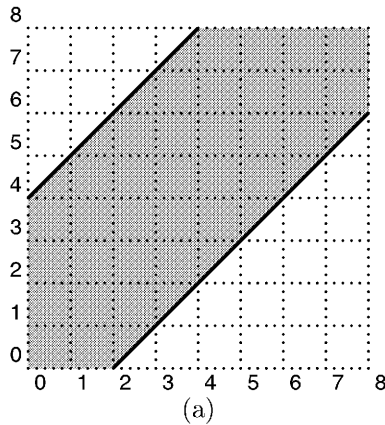
3 Domaine abstrait des matrices de différences bornées

La suite du sujet étudie l'interprétation abstraite de vecteurs de réels par des matrices de différences bornées. On établira dans cette section des propriétés sur le domaine abstrait des matrices de différences bornées. On s'intéressera dans la section suivante à la mise en œuvre algorithmique de ce domaine abstrait, et en particulier au calcul de formes normales.

Dans toute la suite du sujet, n désignera un entier naturel tel que $n \geq 2$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des *vecteurs* $\vec{x}$ de réels *de dimension* n . La i -ème composante (avec $1 \leq i \leq n$) d'un vecteur $\vec{x}$ est notée x_i . Un vecteur $\vec{x}$ peut également s'écrire $(x_1, \dots, x_n)$.

Posons $H_{k,l}^c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_k - x_l \leq c\}$ pour tous $c \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq l$. Un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est un *demi-espace diagonal* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $k, l \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq l$ tels que $X = H_{k,l}^c$. On appelle *polyèdre diagonal* toute intersection finie de demi-espaces diagonaux. Observons que si $\vec{x}$ appartient à un polyèdre diagonal $P \subseteq \mathbb{R}^n$ alors $(x_1 + t, \dots, x_n + t) \in P$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous allons dans la suite représenter les polyèdres diagonaux par des matrices carrées, afin de pouvoir les manipuler en machine.

Exemple. Les deux figures ci-dessous représentent (a) le polyèdre diagonal $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y - x \leq 4\}$, et (b) la coupe dans le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ du polyèdre diagonal $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq y - x \leq 4 \text{ et } 1 \leq x - z \text{ et } 0 \leq y - z \leq 6\}$.



On désigne par $\overline{\mathbb{M}}_n$ l'ensemble des *matrices* carrées de taille n (i.e. n lignes et n colonnes) à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}$. Le *coefficient* d'une matrice carrée $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ situé à la i -ème ligne et j -ème colonne (avec $1 \leq i, j \leq n$) sera noté a_{ij} . Une matrice carrée $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ peut également s'écrire $A = (a_{ij})_{i,j}$. On définit l'ordre partiel $\leq$ sur $\overline{\mathbb{M}}_n$ par : $A \leq B$ si $a_{ij} \leq b_{ij}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Question 7 Montrer que l'ensemble partiellement ordonné $(\overline{\mathbb{M}}_n, \leq)$ est un treillis complet. Quel est son plus petit élément ? Quel est son plus grand élément ?

On note respectivement $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{\mathcal{M}}_n$ et $\mathcal{P}_n$ les treillis complets $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, $(\overline{\mathbb{M}}_n, \leq)$ et $(\mathbb{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$. On définit les fonction $\alpha : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{M}}_n$ et $\gamma : \overline{\mathbb{M}}_n \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\begin{aligned}\alpha(X) &= (\sup_{\overline{\mathcal{R}}} \{x_j - x_i \mid \vec{x} \in X\})_{i,j} \\ \gamma(A) &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_j - x_i \leq a_{ij} \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n\}\end{aligned}$$

Question 8 Montrer que le couple $\langle \alpha, \gamma \rangle$ forme une connexion de Galois $\mathcal{P}_n \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \overline{\mathcal{M}}_n$. Exprimer (en donnant leurs coefficients) les matrices $\alpha(\emptyset)$ et $\alpha(\mathbb{R}^n)$. Exprimer (de manière simple) les ensembles $\gamma(\perp_{\overline{\mathcal{M}}_n})$ et $\gamma(\top_{\overline{\mathcal{M}}_n})$.

Question 9 Soit A une matrice dans $\overline{\mathbb{M}}_n$. Montrer que si un des coefficients de A est égal à $-\infty$ alors $\gamma(A) = \emptyset$. La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

La question suivante montre que l'ensemble $\gamma(\overline{\mathbb{M}}_n)$ de toutes les concrétisations de matrices coïncide avec l'ensemble des polyèdres diagonaux.

Question 10 Montrer que $\gamma(A)$ est un polyèdre diagonal pour toute matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$. Montrer que $\gamma \circ \alpha(P) = P$ pour tout polyèdre diagonal $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

Notation. Pour simplifier l'écriture, on notera $A \wedge B$ (resp. $A \vee B$) la borne inférieure $\inf_{\overline{\mathcal{M}}_n} \{A, B\}$ (resp. supérieure $\sup_{\overline{\mathcal{M}}_n} \{A, B\}$) de deux matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$.

Question 11 Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$, on a :

$$\begin{aligned}\gamma(A \wedge B) &= \gamma(A) \cap \gamma(B) \\ \gamma(A \vee B) &\supseteq \gamma(A) \cup \gamma(B)\end{aligned}$$

Question 12 Exhiber deux matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$ telles que $\gamma(A) = \gamma(B) \neq \gamma(A \vee B)$. Peut-on de plus choisir A et B telles qu'elles soient comparables (i.e. $A \leq B$ ou $B \leq A$) ?

La notion de matrices closes permettra la caractérisation des formes normales. Une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ est dite *close* si $a_{ii} = 0$ et $a_{ij} \leq a_{ik} + a_{kj}$ pour tous i, j, k dans $\{1, \dots, n\}$.

Question 13 Soit A une matrice dans $\overline{\mathbb{M}}_n$. Montrer que si A est close, alors $\gamma(A)$ contient le vecteur $\vec{s}$ défini par : $s_j = \inf_{\overline{\mathcal{R}}} \{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\}$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

4 Algorithmique des matrices à différences bornées

On justifiera la correction et la complexité des algorithmes proposés. Lorsqu'on analysera la complexité en temps des algorithmes, on supposera que les opérations usuelles sur les nombres réels sont effectuées en temps constant.

Question 14 Donner des algorithmes fonctionnant en temps $O(n^2)$ pour (a) le calcul de $A \wedge B$, (b) le calcul de $A \vee B$, et (c) le test $A \stackrel{?}{\leq} B$.

La mise sous forme normale des matrices à différences bornées va utiliser des algorithmes de plus courts chemins dans des graphes associés aux matrices. Un *graphe orienté pondéré* est un triplet $G = (V, E, w)$ où V est un ensemble fini de *sommets*, $E \subseteq V \times V$ est un ensemble d'*arêtes* et $w : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction de *pondération*. Remarquons que la fonction de pondération est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Rappelons qu'un *chemin* dans un graphe orienté pondéré $G = (V, E, w)$ est une suite finie non vide de sommets $v_0, \dots, v_k$ avec $k \geq 0$ tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour tout $0 \leq i < k$. L'entier k est alors appelé la *longueur* du chemin. La fonction de pondération est étendue aux chemins par $w(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$. En particulier un chemin de longueur nulle a un poids nul. Un sommet v est *atteignable* depuis un sommet u s'il existe un chemin $v_0, \dots, v_k$ dans G tel que $v_0 = u$ et $v_k = v$. Un *circuit* est un chemin $v_0, \dots, v_k$ de longueur non nulle tel que $v_0 = v_k$.

Etant donné un graphe $G = (V, E, w)$, la fonction de *distance* $\delta_G : V \times V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est définie par :

$$\delta_G(u, v) = \inf_{\bar{\mathbb{R}}} \{w(v_0, \dots, v_k) \mid v_0 = u, v_k = v, \text{ et } v_0, \dots, v_k \text{ est un chemin dans } G\}$$

On considère deux variantes du problème algorithmique de calcul des distances, suivant que l'on cherche à calculer les distances entre tous les couples de sommets ou bien uniquement les distances entre un sommet source et tous les autres sommets. Les *spécifications Distances* et *DistancesDepuisSource* données ci-dessous spécifient formellement ces deux variantes.

```

1  Distances( $G$  : graphe orienté pondéré)
2  si il existe des sommets  $u$  et  $v$  tel que  $\delta_G(u, v) = -\infty$ 
3  alors retourner "distance égale à  $-\infty$  détectée"
4  sinon retourner les distances  $\delta_G(u, v)$  pour tout couple de sommets  $(u, v)$  de  $G$ 

```

```

1  DistancesDepuisSource( $G$  : graphe orienté pondéré,  $s$  : sommet source)
2  si il existe un sommet  $v$  tel que  $\delta_G(s, v) = -\infty$ 
3  alors retourner "distance égale à  $-\infty$  détectée"
4  sinon retourner les distances  $\delta_G(s, v)$  pour tout sommet  $v$  de  $G$ 

```

Les deux questions suivantes concernent l'algorithmique des graphes orientés pondérés, avec *pondération à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$* .

Question 15 Soient u et v deux sommets dans un graphe orienté pondéré $G = (V, E, w)$, avec $w : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Montrer les deux assertions suivantes :

- i) $\delta_G(u, v) = +\infty$ si et seulement si v n'est pas atteignable depuis u .
- ii) $\delta_G(u, v) = -\infty$ si et seulement s'il existe un circuit $v_0, \dots, v_k$ de poids strictement négatif tel que v_0 est atteignable depuis u et v est atteignable depuis v_0 .

Question 16 Les algorithmes demandés dans cette question prennent en entrée des graphes orientés pondérés $G = (V, E, w)$ avec $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Donner un algorithme respectant la spécification *Distances* et fonctionnant en temps $O(|V|^3)$.
2. Donner un algorithme respectant la spécification *DistancesDepuisSource* et fonctionnant en temps $O(|V| \cdot |E|)$.

Considérons une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$. Le *graphe associé* à A est le graphe orienté pondéré $G(A) = (\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}, w)$ avec $w(i, j) = a_{ij}$. Observons que A est la matrice d'adjacence du graphe $G(A)$. On définit la matrice $\Delta(A) \in \overline{\mathbb{M}}_n$, appelée *matrice de distance* de A , comme suit :

$$\Delta(A) = \begin{cases} \perp_{\overline{\mathbb{M}}_n} & \text{s'il existe } 1 \leq i, j \leq n \text{ tels que } \delta_{G(A)}(i, j) = -\infty \\ (\delta_{G(A)}(i, j))_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 17 Montrer que pour toute matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$, la matrice de distance de A vérifie :

- i) si A est close alors $\Delta(A) = A$, et
- ii) si $\Delta(A) \neq \perp_{\overline{\mathbb{M}}_n}$ alors $\Delta(A)$ est close.

Question 18 Donner un algorithme prenant en entrée une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ et calculant $\Delta(A)$ en temps $O(n^3)$.

Question 19 Donner un algorithme prenant en entrée une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ et décidant si $\Delta(A) = \perp_{\overline{\mathbb{M}}_n}$ en temps $O(n \cdot m + n^2)$, où m est le nombre de coefficients de A qui sont dans $\mathbb{R}$.

Question 20 Montrer que $\gamma(\Delta(A)) = \gamma(A)$ pour toute matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$. En déduire un algorithme prenant en entrée une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ et décidant si $\gamma(A) = \emptyset$ en temps $O(n \cdot m + n^2)$, où m est le nombre de coefficients de A qui sont dans $\mathbb{R}$.

Question 21 Soit $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ une matrice close. Montrer que pour tous $1 \leq i, j \leq n$ les deux assertions suivantes sont satisfaites :

- i) si $a_{ij} < +\infty$ alors il existe $\vec{x} \in \gamma(A)$ tel que $x_j - x_i = a_{ij}$.
- ii) si $a_{ij} = +\infty$ alors pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $\vec{x} \in \gamma(A)$ tel que $x_j - x_i \geq r$.

Question 22 Déduire de la question précédente que $A = \text{nf}(A)$ pour toute matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ close. En déduire que $\text{nf}(A) = \Delta(A)$ pour toute matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$.

Les questions 18 et 22 fournissent ainsi un algorithme prenant en entrée une matrice $A \in \overline{\mathbb{M}}_n$ et calculant la forme normale de A en temps $O(n^3)$.

La question 12 montrait que l'application de la borne inférieure $\vee$ peut induire une perte de précision "inutile". La question suivante montre que lorsqu'elle est appliquée à des matrices en forme normale, alors la borne inférieure produit la "meilleure" sur-approximation de l'union ensembliste.

Question 23 Montrer que $A \vee B = \alpha(\gamma(A) \cup \gamma(B))$ pour toutes matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$ en forme normale. En déduire que $A \vee B$ est en forme normale pour toutes matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$ en forme normale. Exhiber deux matrices $A, B \in \overline{\mathbb{M}}_n$ en forme normale telles que $A \wedge B$ n'est pas en forme normale.

FIN DU SUJET