R 18 - 83

Ecole normale supérieure de Rennes

Département Droit-économie-gestion

Concours d'admission en 1^{re} année

Session 2018

Épreuve à options

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Ce sujet comporte un total de 10 pages

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irréversiblement choisie** au moment de leur inscription.

Les trois options proposées sont :

- droit commercial
- droit public
- mathématiques appliquées

Composition de droit commercial

Sujet

La société à responsabilité limitée est-elle une forme sociale obsolète ?

Composition de droit public

Sujet

La coopération intercommunale.

Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

- L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
- Trois feuilles de papier millimétré sont fournies avec l'énoncé.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
- Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (Quelques chiffres sur l'agriculture française.)

L'ensemble des résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur les indices des prix de l'orge et l'autre sur la taille des exploitations.

A] Même si les prix des céréales sont sujet à de fortes fluctuations en fonction des années, on peut s'intéresser au lien entre les prix des différents types de céréales.

Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne les indices des prix à la tonne de l'orge de mouture, destinée à la production de farine, et de l'orge de brasserie, destinée à la fabrication de la bière. L'indice 100 est fixé pour chacun de ces types de céréales à l'année 2010.

Année	Rang de l'année x_i	Orge de mouture y_i	Orge de brasserie z_i
2000	0	86,4	93,3
2001	1	82	93
2002	2	72,5	84,1
2003	3	80,5	85
2004	4	82,2	77,7
2005	5	73,2	73,1
2006	6	81,4	93,4
2007	7	132,6	166,7
2008	8	119,5	141,9
2009	9	75,3	74,3
2010	10	100	100
2011	11	138,5	158,2

1) Représenter le nuage de points associé à la série $(y_i,z_i)_{i=1,\dots,12}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité 1 cm pour 10 points d'indice pour les axes des abscisses et des ordonnées, la graduation de ces axes commençant à 50.

2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(y_i,z_i)_{i=1,\dots,12}$.
Un ajustement affine est-il approprié ? Cela prouve-t-il qu'il existe un lien de cause à effet entre ces deux indices ?

3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en y par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

4) Peut-on déduire de la question précédente une prévision de l'indice du prix de l'orge de brasserie pour l'année 2017 ? Si oui, la calculer, sinon dire ce qu'il faudrait faire pour obtenir une prévision.

5) Un spécialiste du secteur prévoit que l'indice du prix de l'orge de brasserie sera de 110 en 2017. Calculer une estimation de l'indice de l'orge de mouture en 2017.

6) Un expert indique que l'évolution du climat pourrait causer à moyen terme une montée de l'indice des prix de l'orge de mouture à 300. Dans le cas où cette annonce se vérifierait, quelle estimation peut-on faire pour l'orge de brasserie ?
Quel niveau de confiance peut-on accorder à cette estimation ?

B] On s'intéresse maintenant à la taille et la surface des exploitations agricoles en France en 2013.

Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne le nombre d'exploitations agricoles en fonction de leur taille, ainsi que la Surface Agricole Utilisée (abrégé : SAU) totale pour chaque classe de tailles, pour l'année 2013.

Dans le tableau, 1 ha signifie un hectare, c'est-à-dire 10 000 m^2.

SAU	Nombre d'exploitations		SAU totale	
en ha	en milliers	en %	en milliers d'hectares	en %
moins de 20	202,3	42,8	1164	4,2
de 20 à moins 50	79	16,7	2655	9,6
de 50 à moins 100	93,3	19,8	6751	24,3
de 100 à moins 200 ha	74	15,7	10191	36,7
200 ou plus	23,6	5	6978	25,2

1) Quel est le type de la série statistique décrite par les deux premières colonnes (SAU et nombre d'exploitations) ?

2) Calculer la surface moyenne d'une exploitation.

3) Donner un encadrement de la surface d'exploitation médiane.

4) En admettant que les exploitations de la dernière tranche soient uniformément réparties entre 200 hectares et M hectares (M est donc le maximum), calculer M.

5) En supposant que la plus grande exploitation fasse 400 ha, tracer un histogramme correspondant aux deux premières colonnes du tableau. (L'échelle est laissée à l'appréciation du candidat.)

6) Donner la ou les classes modales (pour les deux premières colonnes).

Exercice 2 (Probabilités)

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

On s'intéresse à l'efficacité de deux stratégies de traitement des cultures d'orge. Puis à deux aspects pratiques de la moisson.

Partie 1 – Traitement d'une maladie de l'orge.

On considère une procédure de traitement des cultures contre une maladie qui cause une baisse de qualité de la production.
En cas de contamination, si la maladie n'est pas éradiquée, l'orge est déclassée.
Le processus employé par l'exploitant est le suivant :

(1) Il fait un test un mois avant la récolte.

(2) Si le test est positif (la maladie est détectée), il applique un traitement.

(3) Il fait la récolte et constate alors si son orge est déclassée.

Lorsque la maladie est détectée, il se peut qu'elle soit à un stade précoce ou avancé, et cela à une influence sur l'efficacité du traitement.

On sait que :

- Dans 90% des cas le test est négatif, et dans ce cas la probabilité que la récolte soit déclassée est de $0{,}1$.
- Dans 9% des cas le test est positif et la maladie est à un stade précoce, et dans ce cas, après traitement, la probabilité de déclassement est de $0{,}01$.
- Dans le reste des cas le test est positif et la maladie est à un stade avancé, et dans ce cas, après traitement, la probabilité de déclassement est de $0{,}91$.

On pose les événements suivants :

- N : « le test est négatif. »
- E : « le test est positif et le stade précoce. » (Cas où le traitement est efficace.)
- I : « le test est positif et le stade avancé. » (Cas où le traitement est inefficace.)
- D : « la récolte est déclassée. »

1) Donner les probabilités $P(N)$, $P(E)$ et $P(I)$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_N(D)$, $P_E(D)$ et $P_I(D)$.

2) Calculer la probabilité que le test soit négatif et la récolte déclassée.

3) Montrer que la probabilité que la récolte soit déclassée est $0{,}1$.

4) Les événements N et D sont-ils indépendants ?

5) La récolte a été déclassée, quelle est la probabilité que la maladie ait été détectée à un stade avancé ?

6) Calculer la probabilité $P_{E\cup I}(D)$.

Dans toute la suite les coûts et recettes sont entendus « par hectare ».
La récolte rapporte normalement 800 € et seulement 400 € si elle est déclassé. Mais le test coûte 100 €, et le traitement 200 €.

On note G la variable aléatoire égale au gain de l'exploitant par hectare, en €.
On admet que la loi de G est :

x	700	500	300	100
$P(G=x)$	$0{,}81$	$0{,}09$	$0{,}09$	$0{,}01$

7) Calculer l'espérance et la variance de G.

Partie 2 – Une autre stratégie : traiter à l'aveugle.

Un autre exploitant décide de traiter systématiquement sans faire de test. Mais pour éviter de trop grosses fluctuations de ses revenus, il sépare ses culture d'orge en 10 parcelles indépendantes de même superficie.
On admet qu'ainsi, il gagnera 600 € par hectare pour une parcelle non déclassée, ce qui se produit avec une probabilité de $0{,}98$. Sinon, il gagnera 200 € par hectare pour une parcelle déclassée.

On note X la variable aléatoire égale nombre de parcelles déclassées, et H la variable aléatoire égale au gain moyen de l'exploitant par hectare, en €.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer la probabilité qu'au maximum une parcelle soit déclassée.

3) Montrer que $H = 600 - 40X$
En déduire l'espérance et la variance de H.

En comparant les espérances et variances de H avec celles de G (Dernière question de la partie précédente), dire quelle est la meilleure stratégie selon vous, et pourquoi.

4) Déterminer la probabilité que le gain moyen par hectare soit supérieur strictement à 520 €.

Partie 3 – La moisson.

On s'intéresse maintenant à deux aspects de la moisson : Le rendement et le problème de l'orge couchée au sol.

On considère la variable aléatoire A qui donne, pour un hectare, le nombre d'ares (un are est égal à 100 m^2) sur lesquels l'orge est couchée, ce qui implique une difficulté pour les moissonner et une baisse du rendement à cause du grain tombé au sol.

On admet que A suit une loi de Poisson de paramètre 5.

1) Donner l'espérance et la variance de A.

2) Calculer la probabilité qu'exactement 5 ares soient couchés.

3) Calculer la probabilité qu'au moins 3 ares soient couchés.

On considère maintenant la variable aléatoire R qui donne le rendement moyen en tonnes par hectare.
On admet que R suit une loi normale de moyenne $6{,}5$ et d'écart type $1{,}5$.

4) Calculer la probabilité que le rendement moyen soit supérieur à $7{,}25$ tonnes par hectare.

5) On dit que le rendement est dans la norme s'il se situe dans l'intervalle $[6{,}5 - a\,;\,6{,}5 + a]$, où a est un réel positif vérifiant $P(6{,}5 - a \leqslant R \leqslant 6{,}5 + a) = 0{,}95$.
Déterminer a. Un rendement de 9 est-il hors-norme ?

Exercice 3 (Étude de fonctions)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{ne^{-\frac{n}{x}}}{x^3}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n.
On pose également les réels strictement positifs suivants :

$$\alpha_n = \frac{n}{3} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Partie 1

1) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et montrer que

$$f_n'(x) = (n-3x)\frac{n}{x^5}e^{-\frac{n}{x}}$$

2) En déduire le tableau de variations de f_n sur $]0;+\infty[$.
On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3) Donner le maximum de la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ et l'abscisse en laquelle il est atteint.

4) Montrer que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{ne^{-\frac{n}{x}}}{x^3}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)$$

En déduire le point d'intersection de $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathcal{C}_n$.

5) Simplifier β_1, $f_1(\beta_1)$, $f_1'(\beta_1)$, $f_2(\beta_1)$ et $f_2'(\beta_1)$.

6) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unité graphique est de 5 cm, les allures de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On limitera le graphique aux abscisses positives.
On placera les tangentes horizontales ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ aux points d'abscisse β_1.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier l'existence d'un point remarquable de la courbe de f_n.

1) Soit a un réel strictement positif.
Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_n$ en a utilisant $f_n(a)$ et $f_n'(a)$ sans les remplacer par leur expression.

2) En déduire que cette tangente passe par l'origine du repère si et seulement si $af_n'(a) = f_n(a)$.

3) Montrer qu'il existe une unique abscisse a_n telle que la tangente (Δ_n) à $\mathcal{C}_n$ en a_n passe par l'origine du repère.

4) Tracer, sur le même graphique que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, la droite (Δ_1).

Partie 3

On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(x) = \frac{n+x}{x} e^{-\frac{n}{x}}$$

1) Déterminer la dérivée de φ_n.

2) En déduire une primitive F_n de f_n sur $]0; +\infty[$.

3) Calculer $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_n} f_n(x)\,dx$.

En déduire, en fonction de n, l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha_1$ et $x = \alpha_n$.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000