R 19 - 83

Ecole normale supérieure de Rennes

Département Droit-économie-management

Concours d'admission en 1re année

Session 2019

Épreuve à options

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Ce sujet comporte un total de 9 pages

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irréversiblement choisie** au moment de leur inscription.

Les trois options proposées sont :

- droit commercial
- droit public
- mathématiques appliquées

Composition de droit commercial

Sujet

Capital social et formes sociales

Composition de droit public

Sujet

Le Président et le Parlement.

Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

— L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

— Trois feuilles de papier millimétré sont fournies avec l'énoncé.

— Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.

— Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.

— La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

— Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (Quelques statistiques.)

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur la piramide des âges de l'année 2019 et l'autre sur l'évolution de l'indice du volume des ventes sur l'ensemble du commerce en France.

1) Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne l'effectif par tranche d'âges de la population française au 1er janvier 2019.

âge en années	Effectif x_i (en millions)	Pourcentage de femmes
$[0;5[$	$3{,}73$	49%
$[5;10[$	$4{,}11$	$48{,}9\%$
$[10;20[$	$8{,}32$	$48{,}8\%$
$[20;35[$	$11{,}61$	$50{,}5\%$
$[35;50[$	$12{,}9$	$50{,}8\%$
$[50;75[$	$20{,}1$	$52{,}1\%$
$[75;90[$	$5{,}38$	$59{,}2\%$
$[90;115[$	$0{,}84$	$73{,}2\%$

(a) Quel est le type de cette série statistique (x_i) ?

(b) Tracer son histogramme. On prendra 1 cm pour 5 années en abscisse.

(c) Quelles sont la ou les classes modales de cette série ?

(d) Calculer à partir du tableau le pourcentage de femme dans la population totale.

(e) Déterminer le meilleur encadrement possible de l'âge moyen des femmes.

(f) Est-il possible d'affirmer que l'âge moyen des femmes est plus grand que celui des hommes ? Quel calcul pourrait permettre de répondre ? Cela permet-il de conclure dans le cas présent ?

2) On s'intéresse maintenant à l'évolution du volume des ventes dans le commerce en France.

Le tableau suivant *(Source : INSEE)* de l'indice du volume des ventes sur l'ensemble du commerce en France.

Période	Rang x_i	Indice y_i	Période	Rang x_i	Indice y_i
2018 juillet-décembre	$7{,}5$	$109{,}5$	2014 juillet-décembre	$3{,}5$	$98{,}1$
2018 janvier-juin	7	$108{,}4$	2014 janvier-juin	3	$97{,}7$
2017 juillet-décembre	$6{,}5$	$107{,}3$	2013 juillet-décembre	$2{,}5$	$96{,}9$
2017 janvier-juin	6	$104{,}9$	2013 janvier-juin	2	$96{,}4$
2016 juillet-décembre	$5{,}5$	$102{,}5$	2012 juillet-décembre	$1{,}5$	$96{,}6$
2016 janvier-juin	5	$102{,}3$	2012 janvier-juin	1	$96{,}3$
2015 juillet-décembre	$4{,}5$	$100{,}4$	2011 juillet-décembre	$0{,}5$	$96{,}6$
2015 janvier-juin	4	$99{,}1$	2011 janvier-juin	0	$95{,}7$

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,16}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 2 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 1 point d'indice.

(b) Calculer la moyenne et la variance de l'indice du volume des ventes.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

(e) En déduire enfin une prévision pour la première moitié de l'année 2020.

(f) On effectue le changement de variable :

$$\forall i \in \{1; \ldots; 16\},\ z_i = \ln(y_i)$$

Présenter dans un tableau la nouvelle série $(x_i; z_i)$.

(g) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Un ajustement affine est-il justifié ?

(h) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

(i) En déduire une expression de y en fonction de x.
En utilisant cet ajustement, déterminer en quelle année on peut espérer que l'indice du volume des ventes ait augmenté de 10% par rapport au dernier indice (2018 juillet-décembre) ?
Quelle crédibilité accordez-vous à cette estimation ?

Exercice 2 (Étude de fonctions)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n(e^x - 1)}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de f_n.
On pose également, pour $n \geqslant 2$,

$$a_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Partie 1

1) Justifier que, pour $n \geqslant 2$, $a_n > 0$.

2) Déterminer le signe de $(n-1)e^x - n$ en fonction de x.

3) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{e^{nx}\big((n-1)e^x - n\big)}{n(e^x - 1)^2}$.

4) Déduire des deux questions précédentes les tableaux de variation de f_1 et de f_n pour $n \geqslant 2$ sur $]0;+\infty[$.

On admet que pour $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$.

On admet aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = +\infty$.

5) Justifier que, pour $n \geqslant 2$, f_n admet un minimum sur $]0;+\infty[$ et préciser en quelle abscisse.

6) Montrer que $f_n(a_n) = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

7) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ se coupent en a_{n+1}, et préciser la position relative de $\mathcal{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathcal{C}_n$.

8) Déduire sans calcul des questions précédentes la valeur de $f_n(a_{n+1})$.

9) Montrer que $f'_n(a_{n+1}) = -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

10) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unité graphique est de 5 cm, les allures de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

On graduera l'axe des abscisses de 0 à 3 et celui des ordonnées de 0 à 5.

On placera à chaque fois la tangente horizontale, ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a_2 et à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse a_3.

Partie 2

On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_1^{\ln(3)} f_n(x)\,dx = \int_1^{\ln(3)} \frac{e^{nx}}{n(e^x - 1)}\,dx$$

1) Calculer I_1.

2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $(n+1)f_{n+1}(x) - nf_n(x) = e^{nx}$.

3) En déduire la valeur de $(n+1)I_{n+1} - nI_n$.

Partie 3

On souhaite établir un encadrement de $f_n(a_n)$.
On rappelle que $a_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ et que $a_n > 0$.

1) Étudier les variations de φ sur $[1;+\infty[$ définie par

$$\varphi(x) = \ln(x) - x + 1$$

En déduire que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

2) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n \leqslant \frac{1}{n-1}$.

3) Déduire des résultats précédents et de la question **6)** de la partie 1 que

$$1 < f_n(a_n) \leqslant e$$

Exercice 3 (Probabilités)

On s'intéresse à un pêcheur à la ligne qui cherche à financer sa passion, sans toutefois en faire son métier, en revendant ses poissons.

Partie 1 – Probabilités sur ses prises.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Notre pêcheur amateur se rend à la pêche 6 jours par semaines. À chaque fois il lance ses lignes et attend. S'il attrape un poisson, il rentre immédiatement. Et si, au bout d'une heure, il n'a rien pris, il s'arrête là.

Par expérience, il sait qu'un jour sur six il attrape un brochet, trois jours sur six il prends une ablette, le reste du temps il rentre sans rien.

Il sait également que le poisson sera suffisamment gros pour être vendu au poissonnier seulement une fois sur deux quand il s'agit d'un brochet et seulement une fois sur six quand il s'agit d'une ablette.

On prend un jour de pêche au hasard. On considère les événements suivants :

— A : « Il a attrapé une ablette. »

— B : « Il a attrapé un brochet. »

— R : « Il n'a rien attrapé. »

— G : « Le poisson est suffisamment gros pour être vendu. »

1) Donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(R)$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(G)$ et $P_B(G)$.

2) Calculer la probabilité qu'il attrape un brochet suffisamment gros.

3) Calculer la probabilité qu'il attrape une ablette suffisamment grosse.

4) Calculer la probabilité qu'il attrape un poisson suffisamment gros.

5) Les événement A et G sont-ils indépendants ?

6) Il a attrapé un poisson suffisamment gros, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un brochet ?

7) Le poissonnier paie 7€ pour un gros brochet et seulement 1€ pour une grosse ablette.

Le poissonnier lui propose le marché suivant : « Comme la probabilité que tu attrapes une ablette est trois fois plus grande que celle d'attraper un brochet, je te propose de te payer 3€ à chaque fois que tu ramènes un gros poisson, quel qu'il soit. »

Ce marché vous semble-t-il intéressant pour le pêcheur ?

8) Si le pêcheur reçoit 7€ pour un gros brochet et seulement 1€ pour une grosse ablette. On note S la variable aléatoire donnant la recette du jour en euros.

Décrire la loi de S, puis calculer son espérance et sa variance.

9) Le pêcheur n'a pas attrapé de poisson suffisamment gros, quelle est la probabilité qu'il n'ait rien attrapé du tout ?

Partie 2 – Financement.

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

Le pêcheur a finalement accepté le marché, il vend donc ses gros poissons 3€ pièce, qu'il s'agisse d'un brochet ou d'une ablette.

On s'intéresse maintenant à ce qui se passe sur un mois, soit 24 jours de pêche. Les appâts lui coûtent 8€ par mois. On admet que la probabilité qu'il attrape un gros poisson un jour est $\frac{1}{6}$, et ce indépendamment des autres jours.

On considère la variable aléatoire X égale au nombre de gros poissons attrapés au cours du mois.

On considère également la variable aléatoire Y égale au gain réaliser au cours de ce mois.

1) Déterminer la loi de X ?

2) Donner l'espérance et la variance de X.

3) Calculer la probabilité d'attraper au moins deux gros poissons au cours du mois.

4) Exprimer Y en fonction de X, en déduire son espérance et sa variance.

5) Quelle est la probabilité qu'il soit déficitaire ?

Partie 3 – Pêche au filet.

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

Le pêcheur essaie de pêcher au filet dans un étang privé.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il y attrape.

On admet que Z suit une loi de Poisson de paramètre 5.

1) Donner l'espérance et la variance de Z.

2) Quelle est la probabilité d'attraper 4 poissons ?

3) On sait qu'il a attrapé au moins un poisson, quelle est la probabilité qu'il en ait en fait pris 4.

Partie 4 – Taille des poissons.

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1) On constate que la variable aléatoire L, qui donne la longueur en cm d'une ablette, suit la loi de Laplace-Gauss (aussi appelée loi normale) de moyenne 20 et d'écart type 8.

Quelle est la probabilité qu'une ablette fasse plus de 15cm ? Ce qui permettra au pêcheur de la vendre.

2) Quelle est la probabilité qu'une ablette fasse entre 16cm et 24cm ?

3) On sait aussi que la variable aléatoire M, qui donne la longueur en cm d'un brochet, suit la loi de Laplace-Gauss de moyenne μ et d'écart type 10.

Sachant que la probabilité qu'un brochet dépasse les 30cm est de $0{,}34$, déterminer la valeur de μ.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000