

Ecole normale supérieure de Rennes

Département Droit-économie-management

Concours d'admission en 1^{re} année

Session 2025

Épreuve à options

Durée : 4 heures

Ce document comporte un total de 12 pages (hors page de garde)

Les candidats doivent **obligatoirement traiter le sujet qui correspond à l'option qu'ils ont irrévérablement choisie** au moment de leur inscription.

Les trois options proposées sont : - droit commercial : page 1 à 3
- droit public : page 4 à 6
- mathématiques appliquées : page 7 à 12

Documents et matériels autorisés

Droit commercial : Code de commerce et Code civil (Daloz et Litec)

Droit public : Code LexisNexis droit constitutionnel
Daloz code constitutionnel et des droits fondamentaux

Pour ces 2 options, les codes autorisés doivent être :

- non annotés par le candidat (pas de mention manuscrite)
- non indexés par le candidat (l'ouvrage ne doit pas comporter d'onglets de couleur).
- surlignages et soulignages autorisés

Tout autre document est interdit.

Mathématiques appliquées :

- calculatrices autorisées : Casio Graph 35+E et 35+Ell en mode examen (diode allumée).
- document-réponse : copie papier millimétré pour l'épreuve de mathématiques

Commentez la décision suivante :

Cour de cassation
Chambre commerciale
29 mai 2024
Numéro de pourvoi : 22-13.158
Publié au bulletin

R É P U B L I Q U E F R A N Ç A I S E

A U N O M D U P E U P L E F R A N Ç A I S

ARRÊT DE LA COUR DE CASSATION, CHAMBRE COMMERCIALE, FINANCIÈRE ET ÉCONOMIQUE, DU
29 MAI 2024

L'association Mecen'coop, dont le siège est [Adresse 6], a formé le pourvoi n° H 22-13.158 contre l'arrêt rendu le 6 janvier 2022 par la cour d'appel d'Aix-en-Provence (chambre 3-4), dans le litige l'opposant :

1°/ à M. [K] [G], domicilié [Adresse 5],

2°/ à la société Intérim Provence Méditerranée, société par actions simplifiée, dont le siège est [Adresse 3],

3°/ à l'association ADAPEI Var Méditerranée, dont le siège est [Adresse 7],

4°/ à l'association Entraide protestante, EHPAD La Marquisanne 1 et 2, dont le siège est [Adresse 2],

5°/ à l'Association varoise de familles pour évolution de personnes handicapées (AVEFETH), dont le siège est [Adresse 1],

6°/ à l'association Présence personnes handicap intellectuel, dont le siège est [Adresse 4],

défendeurs à la cassation.

La demanderesse invoque, à l'appui de son pourvoi, plusieurs moyens de cassation.

Le dossier a été communiqué au procureur général.

Sur le rapport de M. Ponsot, conseiller doyen, les observations de la SCP Krivine et Viaud, avocat de l'association Mecen'coop, de la SCP Piwnica et Molinié, avocat de M. [G], de la société Intérim Provence Méditerranée, de l'association ADAPEI Var Méditerranée, de l'association présences personnes handicap intellectuel, et l'avis de M. Lecaroz, avocat général, après débats en l'audience publique du 3 avril 2024 où étaient présents M. Vigneau, président, M. Ponsot, conseiller doyen rapporteur, Mme Daubigny, conseiller et Mme Layemar, greffier de chambre,

la chambre commerciale, financière et économique de la Cour de cassation, composée, en application de l'article R. 431-5 du code de l'organisation judiciaire, des président et conseillers précités, après en avoir délibéré conformément à la loi, a rendu le présent arrêt ;

Faits et procédure

1. Selon l'arrêt attaqué (Aix-en-Provence, 6 janvier 2022), la société coopérative d'intérêt collectif par actions simplifiée à capital variable Médicoop Provence Méditerranée, devenue Intérim Provence Méditerranée (la société Médicoop Provence Méditerranée) compte parmi ses associés M. [G], l'association Adapei Var Méditerranée, l'association Entraide protestante, l'Association varoise de familles pour l'évolution des personnes handicapées (AVEFETH), l'association Présence personnes handicap intellectuel et l'association Mecen'coop.

2. L'article 14-1 de ses statuts prévoit qu'un associé peut être exclu par une décision collective des associés et que l'associé dont l'exclusion est susceptible d'être prononcée ne participe pas au vote relatif à son exclusion.

3. Le 10 octobre 2016, les associés de la société Médicoop Provence Méditerranée, dont l'association Mecen'coop, se sont réunis en assemblée générale et il a été décidé l'exclusion de cette association sans qu'elle prenne part au vote.

4. Soutenant que cette décision était irrégulière faute, pour elle, d'avoir participé au vote, l'association Mecen'coop en a poursuivi l'annulation.

Examen des moyens

Sur le premier moyen

5. En application de l'article 1014, alinéa 2, du code de procédure civile, il n'y a pas lieu de statuer par une décision spécialement motivée sur ce moyen qui n'est manifestement pas de nature à entraîner la cassation.

Mais sur le second moyen, pris en sa première branche

Énoncé du moyen

6. L'association Mecen'coop fait grief à l'arrêt de rejeter ses demandes, alors « que tout associé a le droit de participer aux décisions collectives et de voter et que les statuts ne peuvent déroger à ces dispositions que dans les cas prévus par la loi ; que toute clause statutaire contraire est réputée non écrite ; que l'article L. 227-9 du code de commerce n'autorise pas les statuts d'une société par actions simplifiée à prévoir que l'associé dont l'exclusion est envisagée est privé du droit de voter sur cette décision ; qu'au cas d'espèce, en jugeant au contraire qu'en vertu de ce texte, les statuts de la société Médicoop Provence avaient pu valablement stipuler que l'associé dont l'exclusion était envisagée ne participait pas au vote, en sorte que la décision d'exclusion du 10 octobre 2016 était régulière, la cour d'appel a violé les articles 1844 et 1844-10 du code civil, ensemble l'article L. 227-9 du code de commerce. »

Réponse de la Cour

Vu les articles 1844 et 1844-10 du code civil et l'article L. 227-16 du code de commerce :

7. Il résulte de la combinaison de ces textes que si les statuts d'une société par actions simplifiée peuvent prévoir l'exclusion d'un associé par une décision collective des associés, toute stipulation de la clause d'exclusion ayant pour objet ou pour effet de priver l'associé dont l'exclusion est proposée de son droit de voter sur cette proposition est réputée non écrite.

8. Pour rejeter la demande d'annulation de la décision des associés de la société Médicoop Provence Méditerranée ayant décidé l'exclusion de l'association Mecen'coop, l'arrêt énonce qu'il résulte des dispositions de l'article L. 227-9 du code de commerce que les statuts des sociétés par actions simplifiées peuvent déroger au principe selon lequel tout associé dont l'exclusion est discutée participe au vote.

9. En statuant ainsi, la cour d'appel a violé les textes susvisés.

PAR CES MOTIFS, et sans qu'il y ait lieu de statuer sur l'autre grief, la Cour :

CASSE ET ANNULE, sauf en ce qu'il déclare l'association Mecen'coop recevable en son action et en ce qu'il déboute la société Intérim Provence Méditerranée, l'association Adapei Var Méditerranée, l'association Entraide protestante, l'Association varoise de famille pour l'évolution des personnes handicapées (AVEFETH), l'association Présence personne handicap intellectuel et M. [G] de leur demande de dommages et intérêts pour procédure abusive, l'arrêt rendu le 6 janvier 2022, entre les parties, par la cour d'appel d'Aix-en-Provence ;

Remet, sauf sur ces points, l'affaire et les parties dans l'état où elles se trouvaient avant cet arrêt et les renvoie devant la cour d'appel de Lyon ;

Condamne la société Interim Provence Méditerranée, M. [K] [G], l'association Adapei Var Méditerranée, l'association Entraide protestante, l'Association varoise de familles pour l'évolution des personnes handicapées (AVEFETH) et l'association Présence personnes handicap intellectuel aux dépens ;

En application de l'article 700 du code de procédure civile, rejette la demande formée par la société Interim Provence Méditerranée, M. [K] [G], l'association Adapei Var Méditerranée, l'association Entraide protestante, l'Association varoise de familles pour l'évolution des personnes handicapées (AVEFETH) et l'association Présence personnes handicap intellectuel et les condamne à payer à l'association Mecen'coop la somme globale de 3 000 euros ;

Dit que sur les diligences du procureur général près la Cour de cassation, le présent arrêt sera transmis pour être transcrit en marge ou à la suite de l'arrêt partiellement cassé ;

Ainsi fait et jugé par la Cour de cassation, chambre commerciale, financière et économique, et prononcé par le président en son audience publique du vingt-neuf mai deux mille vingt-quatre.

ECLI:FR:CCASS:2024:CO00298

-- Fin du sujet --

Commentez la décision suivante :

CE, Ass., 24 oct. 2024, Mutuelle centrale de réassurance, n° 465144, publié au Recueil Lebon.

« Vu la procédure suivante :

La Mutuelle centrale de réassurance (MCR) a demandé au tribunal administratif de Paris de condamner l'État à lui verser la somme de 61 657 357,24 euros en réparation du préjudice que lui a causé le refus des autorités françaises de lui accorder le bénéfice de la protection diplomatique, en vue d'obtenir l'indemnisation des préjudices qu'elle estime avoir subis du fait des mesures d'expropriation et de nationalisation intervenues en Algérie en 1963 et 1964. Par un jugement n° 1908621/6-1 du 5 février 2021, le tribunal administratif de Paris a rejeté sa demande.

Par un arrêt n° 21PA01740 du 19 avril 2022, la cour administrative d'appel de Paris a annulé ce jugement et rejeté sa requête comme portée devant une juridiction incompétente pour en connaître.

Par un pourvoi sommaire, un mémoire complémentaire et deux mémoires en réplique, enregistrés les 20 juin et 20 septembre 2022, le 7 août 2023 et le 9 octobre 2024 au secrétariat du contentieux du Conseil d'État, la MCR demande au Conseil d'État :

- 1°) d'annuler cet arrêt ;
- 2°) à titre principal de renvoyer l'affaire à la cour administrative d'appel de Paris ;
- 3°) à titre subsidiaire, de faire droit à ses conclusions de première instance ;
- 4°) de mettre à la charge de l'État la somme de 5 000 euros au titre de l'article L. 761-1 du code de justice administrative.

Vu les autres pièces du dossier ;

Vu :

- la Constitution ;
- le code de justice administrative ;

[...]

Considérant ce qui suit :

1. Il ressort des pièces du dossier soumis aux juges du fond que la Caisse centrale de réassurance des mutuelles agricoles (CCRMA) a été créée sur le fondement de la loi du 4 juillet 1900 sur les mutuelles garantissant les agriculteurs contre les risques pouvant survenir sur les exploitations. Son activité se rapportait, en Algérie, avant la proclamation de l'indépendance de cette dernière le 5 juillet 1962, à la fourniture de biens nécessaires à l'exploitation agricole ainsi qu'à divers services de protection et de garantie proposés aux personnes en âge de cesser leur activité. En 1963 et 1964, ses actifs financiers ont été nationalisés et ses biens immobiliers expropriés par l'État algérien sans indemnité. Par une demande reçue le 30 décembre 2014, complétée le 29 juillet 2015, la Mutuelle centrale de réassurance (MCR), venue aux droits de la CCRMA, a présenté au ministre des affaires étrangères une demande tendant à l'exercice de la protection diplomatique, afin que le Gouvernement français prenne à son compte sa réclamation indemnitaire dirigée contre l'État algérien et saisisse la Cour internationale de justice de La Haye. Cette demande a été implicitement rejetée. Par un courrier du 24 décembre 2018, la MCR a adressé

au ministre de l'Europe et des affaires étrangères une réclamation préalable visant à l'indemnisation du préjudice qu'elle estimait avoir subi du fait de son refus d'engager les procédures de nature à permettre l'indemnisation de la mutuelle par l'État algérien, sur le fondement de la responsabilité sans faute pour rupture d'égalité devant les charges publiques. Cette demande ayant également été implicitement rejetée, la MCR a saisi le tribunal administratif de Paris d'une demande tendant à la condamnation de l'État à lui verser la somme de 61 657 357, 24 euros en réparation de ce préjudice. Par un arrêt du 19 avril 2022, contre lequel la MCR se pourvoit en cassation, la cour administrative d'appel de Paris a annulé le jugement du 5 février 2021 du tribunal administratif de Paris et rejeté sa demande comme portée devant une juridiction incompétente pour en connaître.

2. L'exercice de la protection diplomatique est une décision non détachable de la conduite des relations internationales de la France. Les recours tendant à l'annulation d'une telle décision, de même que ceux tendant, sur le terrain de la responsabilité pour faute de l'État, à la réparation des préjudices qu'elle a pu causer, soulèvent des questions qui ne sont pas susceptibles, par leur nature, d'être portées devant la juridiction administrative.

3. La juridiction administrative est, en revanche, compétente pour connaître de conclusions indemnitaires tendant à la mise en cause de la responsabilité sans faute de l'État, sur le fondement de l'égalité des citoyens devant les charges publiques, du fait de décisions non détachables de la conduite des relations internationales de la France. Par suite, la MCR est fondée à soutenir qu'en rejetant comme portées devant une juridiction incompétente pour en connaître ses conclusions tendant, sur ce fondement, à la réparation du préjudice qu'elle estime avoir subi du fait du refus du ministre chargé des affaires étrangères d'exercer la protection diplomatique, la cour administrative d'appel de Paris a entaché son arrêt d'erreur de droit.

4. Il résulte de ce qui précède, sans qu'il soit besoin de se prononcer sur les autres moyens du pourvoi, que la MCR est fondée à demander l'annulation de l'arrêt attaqué.

5. Il y a lieu, dans les circonstances de l'espèce, de régler l'affaire au fond en application des dispositions de l'article L. 821-2 du code de justice administrative.

Sur le cadre juridique applicable à la mise en cause de la responsabilité sans faute de l'État du fait de décisions non détachables de la conduite des relations internationales :

6. La responsabilité sans faute de l'État du fait de décisions non détachables de la conduite des relations internationales peut être engagée à l'égard des personnes relevant de sa juridiction sur le fondement de l'égalité des citoyens devant les charges publiques. Ce régime de responsabilité ne saurait toutefois interférer, même indirectement, avec les objectifs ou la mise en œuvre de la politique extérieure de la France.

7. Lorsque les conditions d'engagement d'une telle action en responsabilité de l'État sont réunies, celle-ci ne peut être accueillie que lorsque l'auteur de la demande supporte une charge spéciale et d'une particulière gravité, hors de proportion avec les sujétions que peut impliquer la conduite de la politique extérieure de la France. Cette responsabilité ne saurait, en principe, être engagée au bénéfice des personnes dont une décision non détachable de la conduite des relations internationales a pour objet même de régir ou d'affecter la situation, soit à titre individuel, soit de manière collective.

8. Enfin, cette responsabilité ne saurait être engagée lorsque le préjudice dont il est demandé réparation trouve son origine directe dans le fait d'un État étranger ou dans des faits de guerre. Elle ne saurait l'être davantage s'il existe un régime spécial d'indemnisation.

Sur la requête de la MCR :

9. Contrairement à ce qu'a estimé le tribunal administratif de Paris, la demande de la MCR ne tendait pas à la réparation de préjudices résultant d'expropriations et de nationalisations réalisées par l'État algérien, mais du préjudice né de la perte de chance d'obtenir une indemnisation par les autorités algériennes du fait du refus de protection diplomatique qui lui avait été opposé. Toutefois, ainsi qu'il a été dit au point 7, la responsabilité sans faute de l'État sur le fondement de l'égalité devant les charges publiques du fait d'une décision non détachable de la conduite des relations internationales de France n'est pas susceptible d'être engagée à l'égard des personnes dont cette décision a pour objet même de régir la situation. Les conclusions indemnitaires de la MCR tendant, sur ce fondement, à obtenir la réparation du préjudice qu'elle estime lui avoir été causé par le refus des autorités françaises d'exercer la protection diplomatique ne peuvent, par suite, qu'être rejetées.

10. Il résulte de ce qui précède que la MCR n'est pas fondée à se plaindre de ce que, par le jugement attaqué, le tribunal administratif Paris a rejeté sa demande d'indemnisation.

11. Les dispositions de l'article L. 761-1 du code justice administrative font obstacle à ce qu'une somme soit mise à la charge de l'État, qui n'est pas, dans la présente instance, la partie perdante.

D E C I D E :

Article 1er : L'arrêt du 19 avril 2022 de la cour administrative d'appel de Paris est annulé.

Article 2 : La requête de la Mutuelle centrale de réassurance et ses conclusions présentées devant le Conseil d'État au titre de l'article L. 761-1 du code de justice administrative sont rejetées.

Article 3 : La présente décision sera notifiée à la Mutuelle centrale de réassurance et au ministre de l'Europe et des affaires étrangères. »

-- Fin du sujet --

Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

- L'usage de la calculatrice, en mode examen, est autorisé pour cette épreuve.
- Une copie à quadrillage millimétré est fournie avec l'énoncé.
- Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.
- Pour répondre à une question, il est possible d'admettre les résultats d'une question précédente non résolue, à condition que cela soit clairement indiqué sur la copie.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les candidats sont invités à encadrer ou souligner, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
- Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : Statistiques.

Dans cet exercice les données sont fictives. Un boulanger hésite à sortir un calendrier de l'Avent dans sa boutique et il souhaite faire une étude pour déterminer le prix de vente afin d'obtenir un bénéfice maximal. On donnera les résultats numériques à 10^{-3} près.

Partie 1 : Etude de marché au sein de la boulangerie.

Le boulanger a réalisé une enquête auprès des clients pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels y_i en fonction du prix de vente x_i . Les résultats obtenus sont les suivants :

Prix de vente unitaire x_i	Nombre d'acheteurs y_i
2	500
5	250
7	200
8	50
10	30
12	15
16	15
20	5
25	3

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour une unité et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 25 unités.
2. Calculer la moyenne et la variance du nombre d'acheteurs. Les formules doivent apparaître.
3. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. On rappellera les formules utilisées. Un ajustement affine est-il approprié ?
4. On pose $\forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket, t_i = \ln(y_i)$.
 - (a) Présenter dans un tableau la série statistique $(x_i, t_i)_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket}$.
 - (b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i, t_i)_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket}$. Un ajustement affine est-il justifié ? On pourra notamment comparer au coefficient de corrélation linéaire obtenu à la question 3.
 - (c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de la forme $t = ax + b$ par la méthode des moindres carrés. Les formules seront données.
 - (d) En déduire une expression de y en fonction de x .
 - (e) Combien de personnes auraient été prêtes à payer 14 euros pour avoir un calendrier de l'Avent ?

Partie 2 : Prise de décision.

Le coût de production d'un calendrier par le boulanger est de 1.50 euros. Le boulanger essaie d'estimer le bénéfice net de la vente de son calendrier en fonction du prix de vente, c'est-à-dire la différence entre le chiffre d'affaire et le coût de production.

1. Recopier et compléter le tableau suivant sur votre copie (CPT est une abréviation pour coût de production total) :

Prix de vente unitaire x_i	Nombre d'acheteurs y_i	CPT	Chiffre d'affaire	Bénéfice
2	500			
5	250			
7	200			
8	50			
10	30			
12	15			
16	15			
20	5			

2. Montrer que la fonction bénéfice b est donnée en fonction du prix unitaire x par

$$b(x) = (x - 1.5)e^{-0.228x+6,272}.$$

3. Dresser le tableau de variations de b sur $[0, +\infty[$. On précisera les valeurs aux bornes.
4. En déduire à combien le boulanger doit-il fixer le prix unitaire de son calendrier de l'Avent pour obtenir un bénéfice maximal. On donnera aussi le bénéfice maximal.

Exercice 2 : Etude de fonctions.

Les parties 1 et 2 ne sont pas indépendantes. La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Partie 1 : Etude de la fonction f .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-6}{x+6}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et montrer que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{12}{(x+6)^2}.$$

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur son domaine de définition.
5. Résoudre dans $\mathcal{D}_f$ l'équation $f(x) = x$.
6. Résoudre dans $\mathcal{D}_f$ l'inéquation $f(x) \geq x$.
7. La courbe représentative de f admet-elle une tangente verticale? On justifiera la réponse.
8. Dans un repère orthogonal, tracer sur un même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de la fonction $x \mapsto x$. Les points d'intersections des deux courbes doivent apparaître sur la représentation graphique.

Partie 2 : Etude d'une suite.

Notre but est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

selon différentes valeurs de u_0 .

1. On suppose que $u_0 = -2$.
 - (a) Calculer u_1 et u_2 . Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la convergence de la suite. On donnera la valeur de la limite.
2. Que peut-on dire si $u_0 = -3$?
3. On considère maintenant le cas où $u_0 \in]-2, +\infty[$.
 - (a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } -2 < u_n.$$

- (b) Comparer u_0 et u_1 . Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant.
 - (c) Prouver votre résultat par récurrence.
 - (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l .
 - (e) Déterminer la valeur de la limite l .
4. Si $u_0 \in]-\infty, -6[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bien définie? Si oui, est-elle monotone à partir d'un certain rang? Converge-t-elle?

Partie 3 : Densité et probabilités.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \alpha x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec α un réel.

1. Rappeler les conditions pour que g soit une densité de probabilité.
2. Déterminer le réel α pour que g soit une densité.
3. Soit X une variable aléatoire qui admet g comme densité.
 - (a) On note G la fonction de répartition de X . Déterminer pour x réel l'expression de $G(x)$.
 - (b) En déduire $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$.

Exercice 3 : Probabilités.

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 : Un lancer de pièce.

Un joueur a à sa disposition dans un petit sachet trois pièces truquées. Il choisit aléatoirement une des trois pièces et chaque pièce a la même probabilité d'être choisie. Il lance la pièce et

- Avec la pièce 1 il a une chance sur trois d'obtenir "Face"
- Avec la pièce 2 il a deux chances sur cinq d'obtenir "Face"
- Avec la pièce 3 il a quatre chances sur cinq d'obtenir "Face"

On suppose que la pièce tombe soit sur le côté "Pile" soit sur le côté "Face". On considère les évènements :

- P_1 : Il choisit la pièce numérotée 1.
- P_2 : Il choisit la pièce numérotée 2.
- P_3 : Il choisit la pièce numérotée 3.
- F : Le joueur obtient Face.

Il est demandé de ne pas introduire d'autres évènements dans cette partie. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité que le joueur utilise la pièce 1 ?
2. Le joueur a choisi la pièce 2. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu "Face" ?
3. Quelle est la probabilité que le joueur ait choisi la pièce numérotée 2 et qu'il ait obtenu "Face" ?
4. Quelle est la probabilité qu'il obtienne "Face" en jouant ? Qu'il obtienne "Pile" ?
5. Sachant qu'il a obtenu "Pile" quelle est la probabilité qu'il ait choisi la pièce numérotée 3 ?

Partie 2 : Rang d'apparition du r ième Face.

Un joueur lance une pièce truquée qui a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur "Face". Le joueur lance indéfiniment la même pièce. Pour tout entier naturel r non nul, X_r est la variable aléatoire égale au rang d'apparition du r ième "Face". On introduit les évènements

- $\forall i \in \mathbb{N}^*, F_i$: "le joueur obtient Face au i ième lancer".

On admet que $\forall x \in]-1, 1[, \forall r \in \mathbb{N}^*$ la série $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et la somme de la série vérifie

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

1. Donner en justifiant le support de X_1 (l'ensemble des valeurs prises par X_1). Reconnaître ensuite sa loi. Donner son espérance et sa variance.
2. En moyenne en combien de lancers le joueur réussit-il à obtenir "Face" ?
3. Etude du cas $r = 2$.
 - (a) Donner le support de X_2 .
 - (b) Ecrire $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, l'évènement $(X_2 = k)$ en utilisant les évènements $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On justifiera l'égalité à l'aide d'une phrase.
 - (c) En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \mathbb{P}(X_2 = k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2.$$

- (d) Montrer que X_2 admet une espérance et la calculer.

4. Etude du cas $r \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On considère jusqu'à la fin de l'exercice que r est un entier naturel non nul.

(a) Donner le support de X_r .

(b) Montrer que

$$\forall k \in X_r(\Omega), \mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

(c) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{N}^*, k \geq r, k \binom{k-1}{r-1} = r \binom{k}{r}.$$

(d) Montrer que X_r admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{r}{p}.$$

5. On note maintenant Y_r le nombre de "Pile" obtenu avant le r ième face.

(a) Donner une relation entre Y_r et X_r .

(b) En déduire la loi de Y_r .

(c) Y_r admet-elle une espérance ? Si oui la donner.

Partie 3 : Durée de vie d'un composant électrique.

La durée de vie d'un composant électrique en année suit une loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un composant électrique.

1. Rappeler l'expression d'une fonction densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Redémontrer que si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.
3. Nous savons que la variable aléatoire Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = 12$. De plus nous savons que $Y = X - 12$. En déduire, en justifiant, le paramètre λ .
4. Déterminer la probabilité que le composant électrique ait une durée de vie inférieure ou égale à 6 ans.

-- Fin du sujet --