

Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule

Juliette Venel

Groupe de Travail “Applications des Mathématiques”

ENS Cachan Rennes, 14 Janvier 2009

Introduction

- Situations d'évacuation d'urgence
- Gestion directe des contacts
- Déterminer les zones de fortes pressions

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

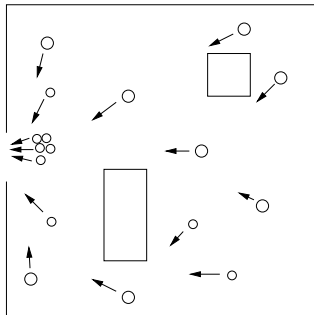
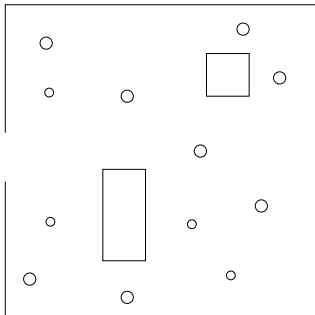
Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

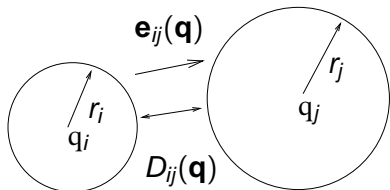
Deux principes



Vitesse souhaitée

Vitesse réelle

Notations



$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{q_j - q_i}{|q_j - q_i|}$$

Ensemble des configurations admissibles

$$Q_0 = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_i - q_j| - r_i - r_j \geq 0 \right\}$$

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q}) = (0 \dots 0, \quad \underbrace{-\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})}_i, \quad 0 \dots 0, \quad \underbrace{\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{q})}_j, \quad 0 \dots 0)$$

Vitesse souhaitée

Notation : $\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_1(\mathbf{q}), U_2(\mathbf{q}), \dots, U_N(\mathbf{q}))$

Description du **comportement piétonnier**

Prise en compte de la géométrie des lieux

- \mathbf{U}_i construit à la main pour donner des directions privilégiées
- \mathbf{U}_i dirigé par le plus court chemin vers la sortie, évitant les obstacles

Prise en compte de la présence d'autres personnes

- ajout de stratégies

Vitesse réelle

Pour gérer les **contacts**, on définit le

Cône des vitesses admissibles

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \right\},$$

où $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q})$.

En notant \mathbf{u} la vitesse réelle des N personnes, le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \int \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = P_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}. \end{cases}$$

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

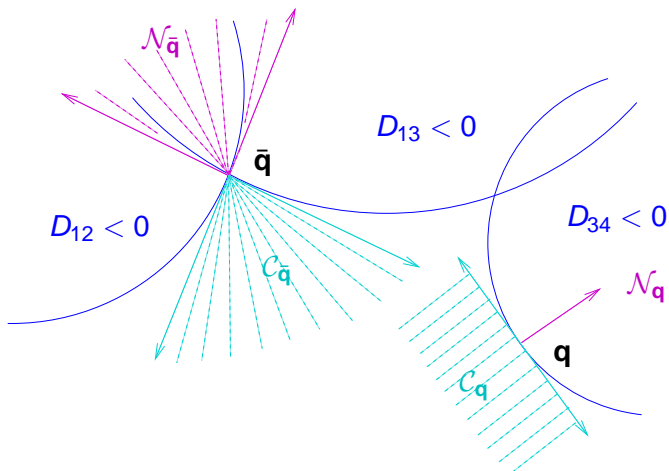
- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique**
Réécriture du modèle
Problème bien posé
- 3 Etude numérique
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Cône \mathcal{N}_q

On introduit \mathcal{N}_q le cône polaire de \mathcal{C}_q :

Définition

$$\mathcal{N}_q = \mathcal{C}_q^\circ = \{ \mathbf{w}, (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_q \}.$$



Inclusion différentielle

$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est appelé **cône normal sortant** et s'écrit comme suit :

Caractérisation

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \lambda_{ij} \geq 0, D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \implies \lambda_{ij} = 0 \right\}.$$

En utilisant la propriété suivante (J.-J. Moreau 62)

$$P_{C_{\mathbf{q}}} + P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} = \text{Id},$$

le problème prend la forme d'une **inclusion différentielle** du premier ordre.

Modèle

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

Cas d'un mouvement rectiligne



$Q_0 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N, q_{i+1} - q_i \geq r_{i+1} + r_i\}$ est un **convexe** fermé.
Comme pour tout \mathbf{q} ,

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q}),$$

on en déduit que \mathcal{N} est un opérateur **maximal monotone**.

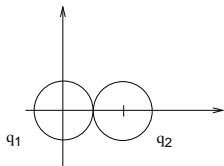
Théorème

Soit \mathbf{U} lipschitzienne, alors pour tout $T > 0$, pour tout $\mathbf{q}_0 \in Q_0$, il existe une unique fonction $\mathbf{q} \in W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^N)$ solution de

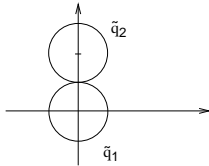
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

(voir par exemple H. Brezis 73)

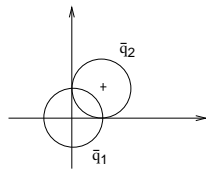
◇ défaut de convexité de Q_0



configuration \mathbf{q}



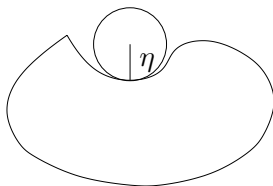
configuration $\tilde{\mathbf{q}}$



configuration $\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}}}{2}$

◇ absence de monotonie de \mathcal{N}

Notion de prox-régularité



Ensemble prox-régulier

Soit S un ensemble fermé,
 S est η -prox-régulier si pour tout point $\tilde{\mathbf{q}}$ à distance $d < \eta$ de S , la **projection** de $\tilde{\mathbf{q}}$ sur S est **bien définie**.

H. Federer 59, A. Canino 88

F. Clarke, R. Stern, P. Wolenski 95

R. Poliquin, R. Rockafellar, L. Thibault 00

Proposition

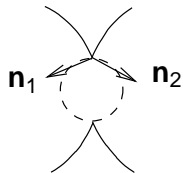
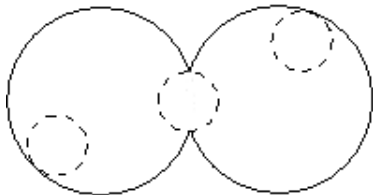
Q_0 est η -prox-régulier avec $\eta = \eta(N, r_i)$.

Idée de la preuve :

Cas d'une seule contrainte :

$Q_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) = |q_j - q_i| - (r_j + r_i) \geq 0\}$ est η_{ij} -prox-régulier avec $\eta_{ij} = \frac{r_i + r_j}{\sqrt{2}}$.

Généralisation à plusieurs contraintes : $Q_0 = \bigcap_{i < j} Q_{ij}$.



Problème bien posé

Théorème

On suppose \mathbf{U} lipschitzienne et bornée.

Alors quel que soit \mathbf{q}_0 dans Q_0 , il existe une unique fonction \mathbf{q} absolument continue vérifiant

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

Application des résultats de J.-F. Edmond et L. Thibault sur les processus de rafle par des ensembles uniformément prox-réguliers (2006).

On vérifie que pour tout \mathbf{q} , $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q})$, où

$$\mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \exists \alpha > 0, \mathbf{q} \in \mathbf{P}_{Q_0}(\mathbf{q} + \alpha \mathbf{v}) \right\}$$

est appelé **cône proximal normal** de Q_0 au point \mathbf{q} .
(F. Clarke, R. Stern, P. Wolenski 95)

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique**
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Schéma numérique

Initialisation : $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}_0$

Boucle en temps : \mathbf{q}^n connu

$$\mathbf{u}^n = P_{C_h(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}^n))$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h \mathbf{u}^n$$

$$\text{où } C_h(\mathbf{q}^n) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \right\}.$$

Adaptation d'un schéma développé pour les écoulements granulaires (B. Maury).

Si l'on interprète cet algorithme en termes de position, on a

$$\mathbf{q}^{n+1} = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n))$$

$$\text{où } K(\mathbf{q}^n) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^n) \geq 0 \right\}.$$

Projections théorique et numérique

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

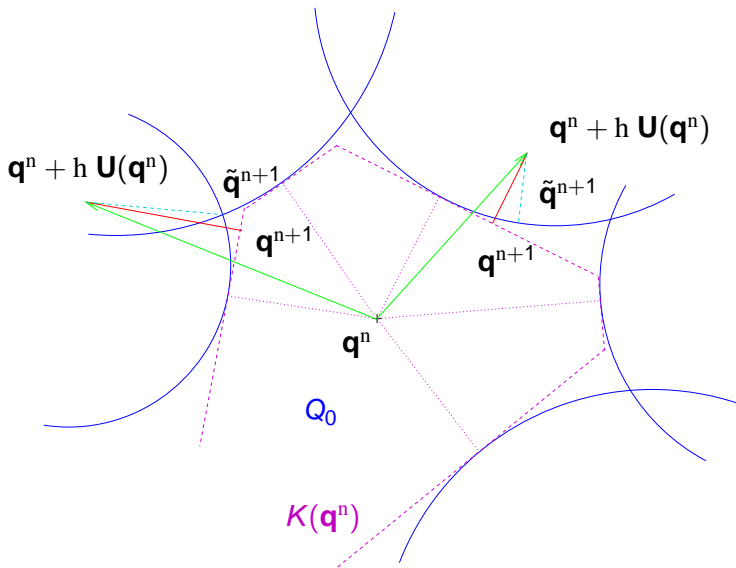
Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives



Convergence

On note \mathbf{q}_h la fonction continue affine par morceaux associée au schéma numérique.

Théorème

On suppose \mathbf{U} lipschitzienne et bornée.

Alors \mathbf{q}_h converge uniformément sur $[0, T]$ vers la fonction \mathbf{q} vérifiant

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) & \text{p.p. sur } [0, T], \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

Problèmes continu et discret

Le problème discret associé à l'algorithme précédent est

$$\mathbf{u}^n + \mathbf{N}(K(\mathbf{q}^n), \mathbf{q}^{n+1}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}^n).$$

Comme $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q})$, le problème continu s'écrit

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Proposition

$$\mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q}) = \mathbf{N}(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}).$$

Les deux étapes de la preuve

Extraction : il existe une sous-suite de la suite (\mathbf{q}_h) qui converge uniformément vers une fonction absolument continue \mathbf{q} sur $[0, T]$.

Vérification de l'inclusion différentielle :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} + N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Proposition

Soient $\mathbf{q} \in Q_0$, $(\mathbf{q}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in (Q_0)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathbf{q}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{q}$,
on définit pour tout $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2N}$,

$$\mathbf{p} = P_{K(\mathbf{q})}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^n = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\tilde{\mathbf{q}}).$$

Alors il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$,

$$\mathbf{p}^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{p}.$$

Convergence des projections

$$\mathbf{p} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}} \in K(\mathbf{q})} \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}}|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij} (D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})) = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{p}^n = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{p}} \in K(\mathbf{q}^n)} \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{q}}|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p}^n = \tilde{\mathbf{q}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij}^n \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \\ \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{p}^n - \mathbf{q}^n) \geq 0 \\ \sum_{i < j} \lambda_{ij}^n (D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{p}^n - \mathbf{q}^n)) = 0, \end{cases}$$

où les coefficients λ_{ij} et λ_{ij}^n sont des réels positifs.

Proposition

Les multiplicateurs de Lagrange λ_{ij}^n sont bornés.

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Vitesse réelle

Algorithme d'Uzawa pour calculer les projections.

Vitesse souhaitée

Méthode de type Fast Marching (R. Kimmel, J. Sethian)
pour calculer la distance géodésique \mathcal{D} à la sortie la plus
proche, en prenant en compte les obstacles.

Cette fonction \mathcal{D} vérifie $|\nabla \mathcal{D}| = 1$.

Programmation orientée objet

C++, STL, VTK.

Intégration de la vitesse souhaitée à SCoPI (A. Lefebvre).

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Résultats numériques

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- Formation d'arches

Film Pression

- Ajout de stratégies individuelles

Film

- Évacuation d'un bâtiment

Film Géodésiques Film Zoom

Modèle

Etude
théorique

Réécriture
Résolution

Etude
numérique

Présentation
Convergence

Programmation

Résultats
numériques

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
- 2 Etude théorique
 - Réécriture du modèle
 - Problème bien posé
- 3 Etude numérique
 - Présentation du schéma
 - Résultat de convergence
- 4 Programmation
- 5 Résultats numériques
- 6 Perspectives

Perspectives

- Problèmes théoriques liés à la présence d'obstacles
- Ajout de la friction
- Comparaison avec des données réelles