

Théorie du contrôle optimal et applications en aéronautique

E. Trélat

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Laboratoire J.-L. Lions
et Institut Universitaire de France

ENS Ker Lann
7 février 2012



Qu'est-ce que la théorie du contrôle ?

But

Amener un système d'un état initial vers un certain état final.

Contrôle optimal

On cherche de plus à minimiser un certain critère.

Stabilisation

Une trajectoire étant planifiée, on cherche à la stabiliser de manière à la rendre robuste, insensible aux perturbations.

Observabilité

Reconstruire l'état complet du système à partir d'informations partielles.



Théorie du contrôle et applications

A quoi s'applique la théorie du contrôle ?

Mécanique

Automobile (guidage, amortisseurs, ABS, ESP assistance à la conduite),
aéronautique (navette, satellites), robotique



Electricité, électronique

Circuit RLC, thermostats, régulation, frigorifiques, ordinateurs, internet
et les communications en général, photographie et vidéo numérique



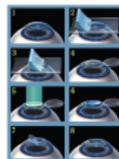
Chimie

Cinétique chimique, génie des procédés, raffinage pétrolier, distillation, pétrochimie



Biologie, médecine

Système proie-prédateur, bioréacteur, contrôle d'épidémies,
secteur médical (pacemakers, opérations au laser)



Economie

Optimisation de gains, contrôle des flux boursiers,
Prévisions de marchés



Exemples de partenaires industriels concernés

Airbus

Alstom

Areva

CNES

Dassault Systèmes

EADS

EDF - RTE

IFP

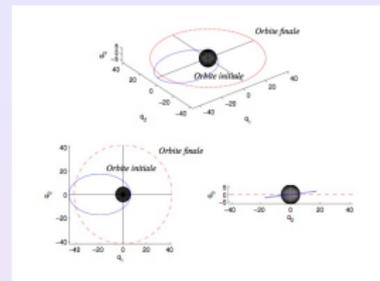
Michelin

Microsoft

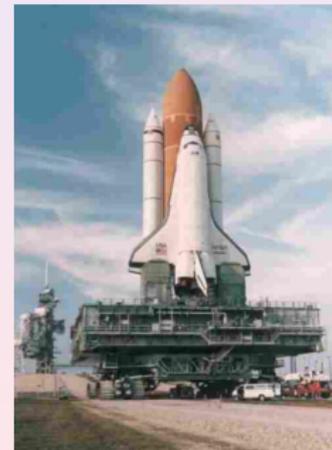
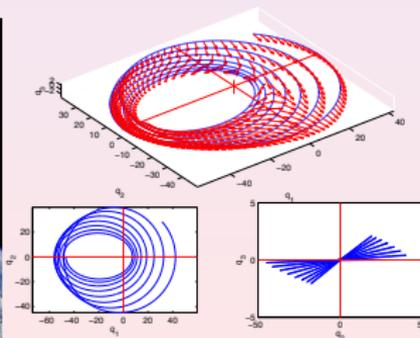
PSA

Thalès

...



Ici, on s'intéresse aux applications de la théorie du contrôle à des problèmes d'aéronautique.



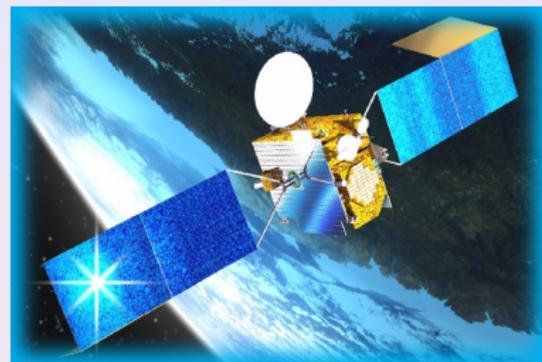
Le problème de transfert orbital à poussée faible

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta |F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max} \simeq 0.1N$$

Transfert d'orbite :

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite *géostationnaire*.

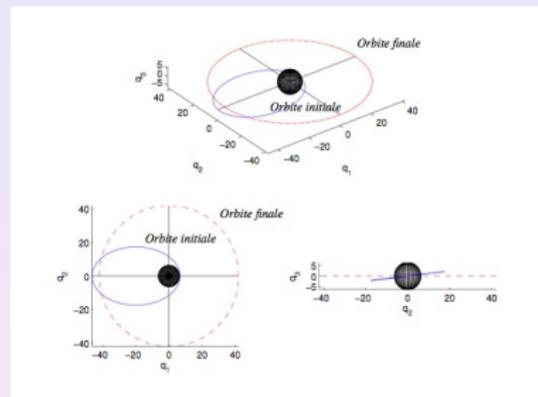
Le problème de transfert orbital à poussée faible

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta |F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max} \simeq 0.1N$$

Transfert d'orbite :

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite *géostationnaire*.

Contrôlabilité : étudiée dans



B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5, 4 (2005), 929–956.



B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, Math. & Appl. 51, Springer Verlag (2006), XIV, 276 pages.

Modélisation sous forme d'un problème de contrôle optimal

Etat : $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$

Contrôle : $u(t) = F(t)$

Problème de contrôle optimal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbf{R}^m,$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1,$$

$$\min C(T, u), \quad \text{où } C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$



Système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

Coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$

Problème de contrôle optimal

Déterminer les trajectoires $x(\cdot)$ solutions de (1), telles que $x(0) \in M_0$, $x(T) \in M_1$, et minimisant le coût $C(T, u)$.



Méthodes numériques

- 1 méthodes directes
- 2 méthodes indirectes

Méthodes directes

Problème de contrôle optimal

$$\min C(T, u)$$

$$\text{sur } \{u \mid \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x_u(0) \in M_0, x_u(T) \in M_1\}$$

Discrétisation totale

⇒ problème d'optimisation non linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned} \min F(Z), \\ g(Z) = 0 \\ h(Z) \leq 0 \end{aligned}$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$.

→ **Résolution numérique** : Méthodes de gradient, de pénalisation, méthodes SQP, etc.

Ou encore : résolution numérique de l'équation d'Hamilton-Jacobi (méthodes explicites, méthodes de front d'onde, ...)

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

↙

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

⇒ Les *extrémales* (x, p) sont solutions de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & x(0) &= x_0, & x(T) &= x_1, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & p(0) &= p_0, \end{aligned}$$

→ **Méthode de tir** :
déterminer p_0 t.q. $x(T) = x_1$.

Problème de contrôle optimal



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



Dualisation

Kuhn-Tucker,
puis méthode de Newtonméthodes directes

Dualisation

Principe du maximum



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc,
puis Newton (méthode de tir)méthodes indirectes

Problème de contrôle optimal



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



Dualisation

Kuhn-Tucker,
puis méthode de Newton

méthodes directes

Dualisation

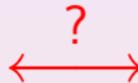
Principe du maximum



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc,
puis Newton (méthode de tir)

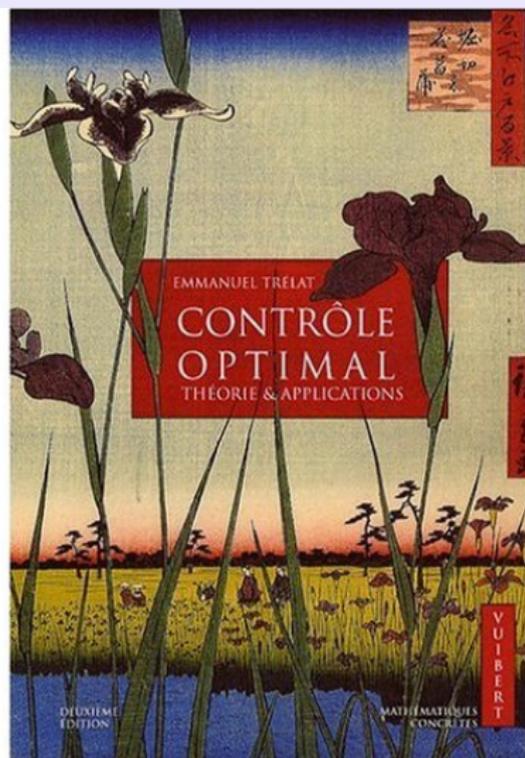
méthodes indirectes



Pas de commutation en général.

Commutation pour les méthodes de Runge-Kutta à coefficients > 0 (cf Hager, 2000).

Pour en savoir plus



E. Trélat,
Contrôle optimal : théorie & applications,
Vuibert.

UPMC
UNIVERSITÉ PARIS
SORBONNE UNIVERSITÉS

Fondation
SCIENTIFICO
MATHÉMATIQUES
DE PARIS

Ici, on utilise les *méthodes de tir*, plus précises mais moins faciles à faire converger.

Problème

Comment faire converger la méthode de tir ?

Différents outils :

- 1 application préalable d'une méthode directe
- 2 méthode de continuation (→ **transfert orbital**)
- 3 étude géométrique (→ **rentrée atmosphérique**)

Transfert orbital, temps minimal

Principe du maximum \Rightarrow les **extrémales** (x, p) sont solutions de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(0) = p_0,$$

avec un contrôle optimal qui **sature la contrainte** : $\|u(t)\| = F_{max}$.

\rightarrow **Méthode de tir** : déterminer p_0 t.q. $x(T) = x_1$,

couplée à une **homotopie** sur $F_{max} \mapsto p_0(F_{max})$

Heuristique sur t_f :

$$t_f(F_{max}) \cdot F_{max} \simeq \text{cste.}$$

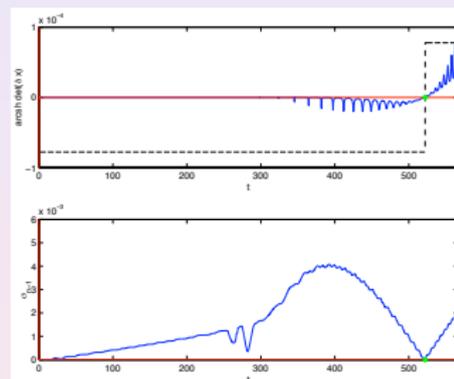
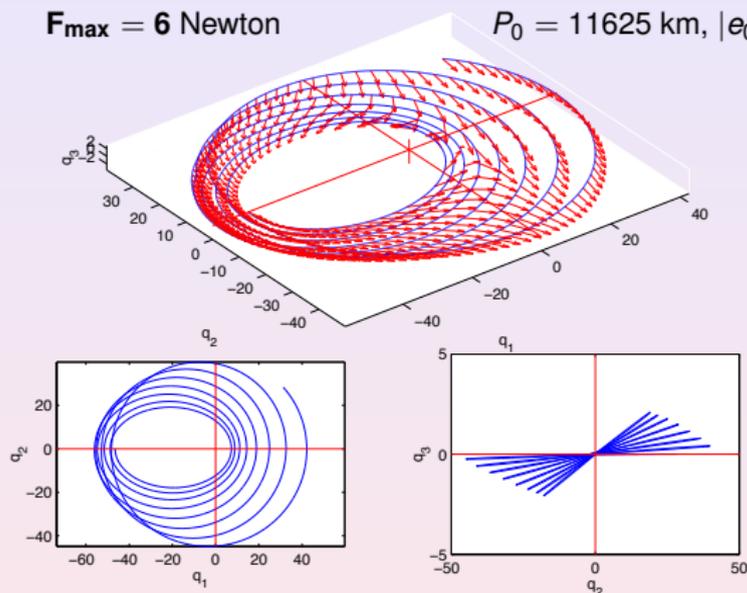
(les trajectoires optimales sont des "droites",
Bonnard-Caillau 2006)

F_{max}	t_f	Exécution	F_{max}	t_f	Exécution
60	14.800	1	1.4	606.13	33
24	34.716	5	1	853.31	44
12	70.249	3	0.7	1214.5	64
9	93.272	7	0.5	1699.4	234
6	141.22	6	0.3	2870.2	223
3	285.77	22	0.2	4265.7	226
2	425.61	22			

Transfert orbital, temps minimal

$F_{\max} = 6$ Newton

$P_0 = 11625$ km, $|e_0| = 0.75$, $i_0 = 7^\circ$, $P_f = 42165$ km



Temps minimal : 141.6 heures ($\simeq 6$ jours). Premier temps conjugué : 522.07 heures.

(simulations obtenues avec **COTCOT**)



Etudes actuelles sur le problème du transfert orbital
(avec EADS - Astrium les Mureaux) :

Transfert à consommation minimale sur les lanceurs **Ariane V**
(troisième phase atmosphérique, poussée forte)

- continuation sur la courbure de la Terre (terre plate \rightarrow terre ronde)



M. Cerf, T. Haberkorn, E. Trélat, *Continuation from a flat to a round Earth model in the coplanar orbit transfer problem*, Preprint Hal (2010), 28 pages.

- contraintes d'éclipses \rightarrow **contraintes sur l'état**, systèmes hybrides



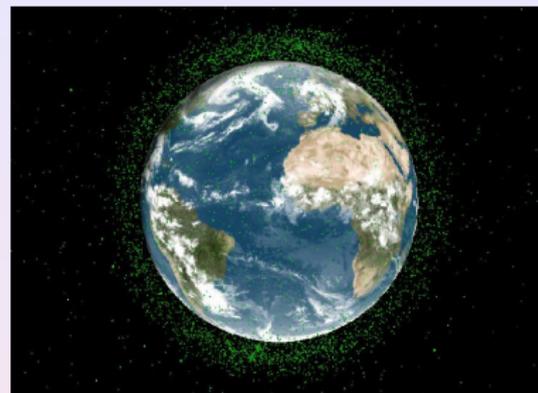
T. Haberkorn, E. Trélat, *Convergence results for smooth regularizations of hybrid nonlinear optimal control problems*, to appear in SIAM J. Control Optim.



Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



En orbite basse

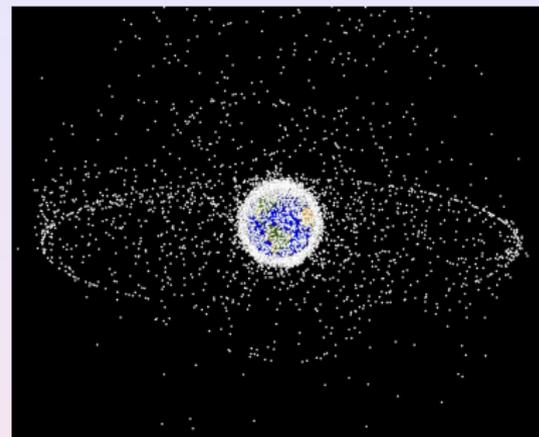
→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire

Etudes en cours, CNES, EADS, NASA

Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



Autour de l'orbite géostationnaire

→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire

Etudes en cours, CNES, EADS, NASA

Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



Les éboueurs de l'espace

→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire

Etudes en cours, CNES, EADS, NASA

Le problème circulaire restreint des 3 corps

Dynamique d'un corps de masse négligeable dans le champ gravitationnel de 2 masses m_1 et m_2 (primaires) ayant des orbites circulaires :

Equations du mouvement (repère tournant)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

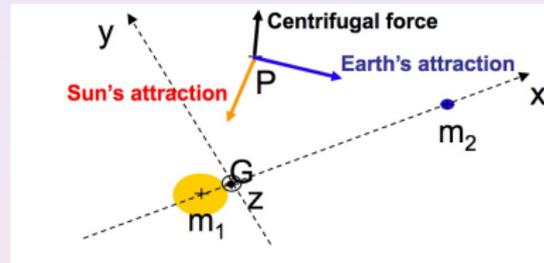
avec

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$$

et

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}.$$



- les trajectoires du problème des 2 corps sont coûteuses en consommation
- but : élaborer des trajectoires de transfert peu coûteuses
- missions interplanétaires
- sites d'observation (SOHO, NGST)

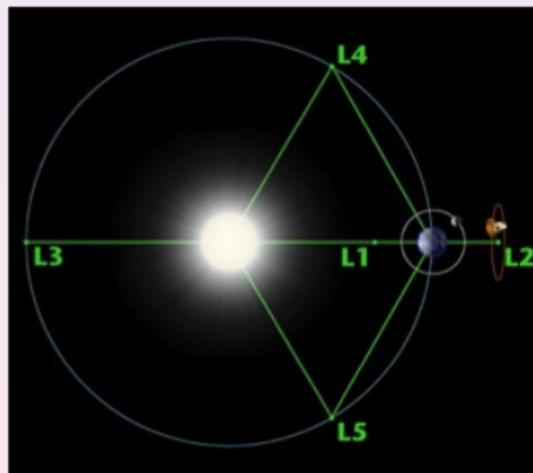
Points de Lagrange

Intégrale première de Jacobi $J = 2\Phi - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ → variété d'énergie de dimension 5

La dynamique a 5 points d'équilibre :

- 3 points colinéaires : L_1, L_2, L_3 (instables) ;
- 2 points équilatéraux : L_4, L_5 (stables).

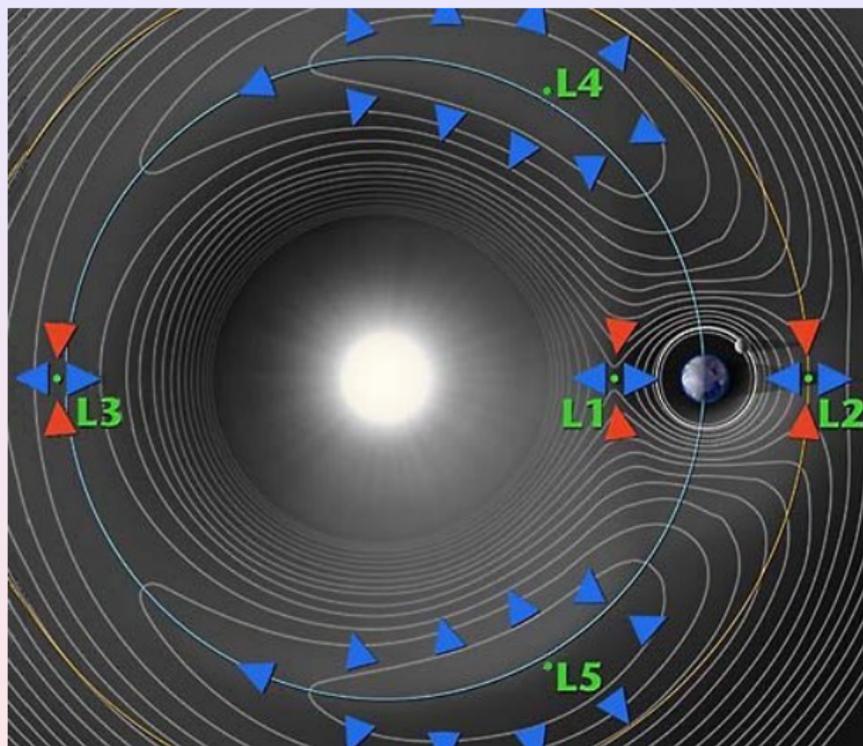
(voir Szebehely 1967)



Extension d'un théorème de Lyapunov (Moser) \Rightarrow même comportement que le système linéarisé autour des points de Lagrange

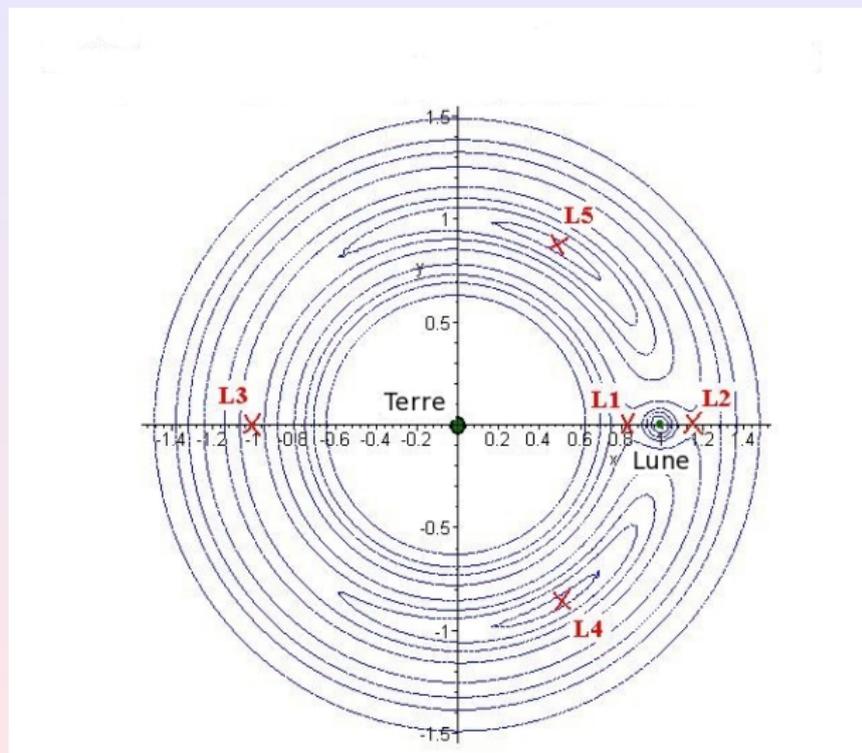
Points de Lagrange dans le système Terre-Soleil

- L_1, L_2, L_3 : instables.
- L_4, L_5 : stables.



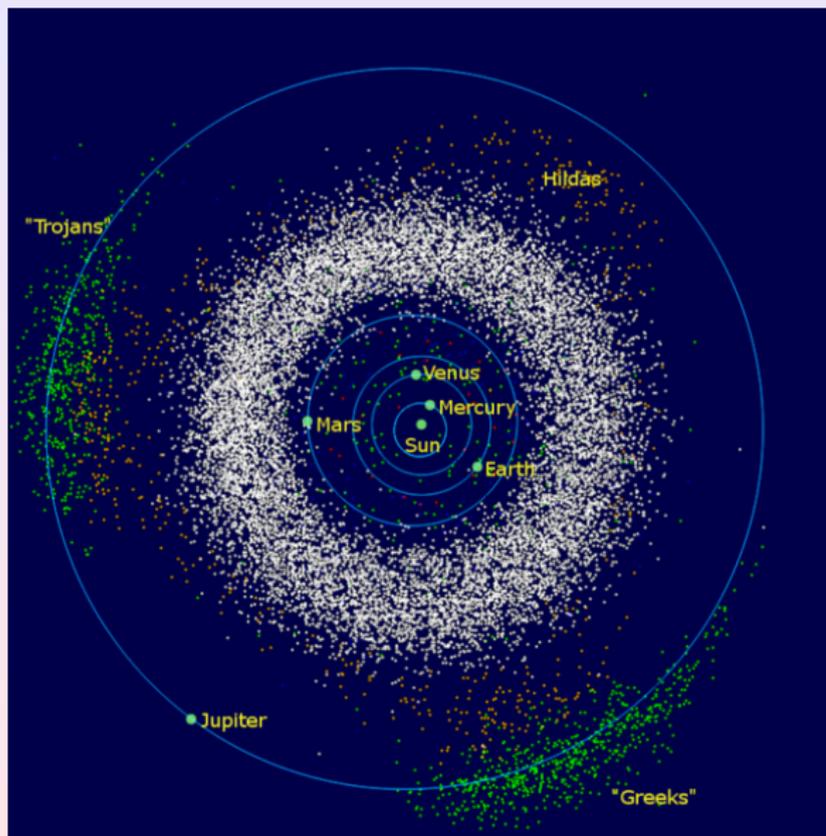
Points de Lagrange dans le système Terre-Lune

- L_1, L_2, L_3 : instables.
- L_4, L_5 : stables.



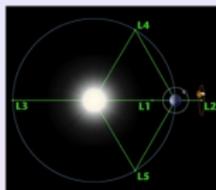
Exemples d'objets aux points de Lagrange

Points L4 et L5 (stables) du système Soleil-Jupiter :
astéroïdes troyens

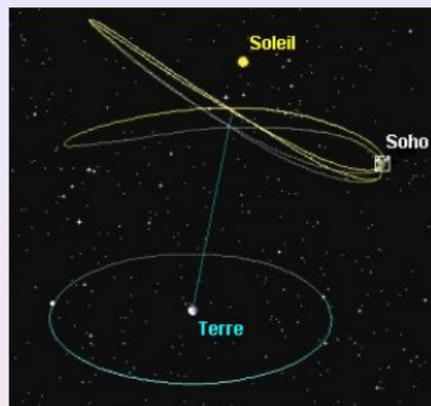


Exemples d'objets aux points de Lagrange

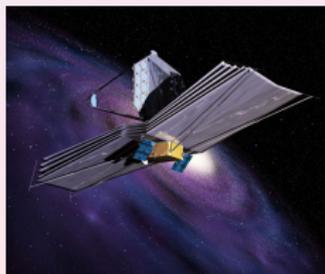
Système
Soleil-Terre :



Point L1 : SOHO



Point L2 : JWST



Point L3 : planète X...



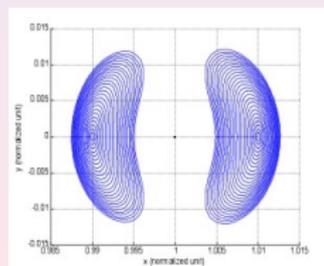
Orbites périodiques

Par un théorème de Lyapunov-Poincaré, il existe :

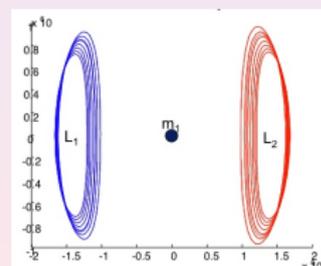
- une famille à 2 paramètres d'orbites périodiques autour de L_1 , L_2 , L_3 ,
- une famille à 3 paramètres d'orbites périodiques autour de L_4 , L_5 .

Parmi elles :

- des orbites planes appelées **orbites de Lyapunov** ;
- des orbites 3D diffeomorphes à des cercles appelées **orbites de halo** ;
- d'autres orbites 3D avec des formes plus compliquées appelées **orbites de Lissajous**.



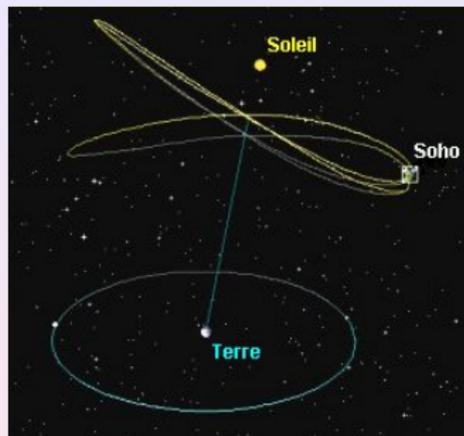
(a) orbites de Lyapunov



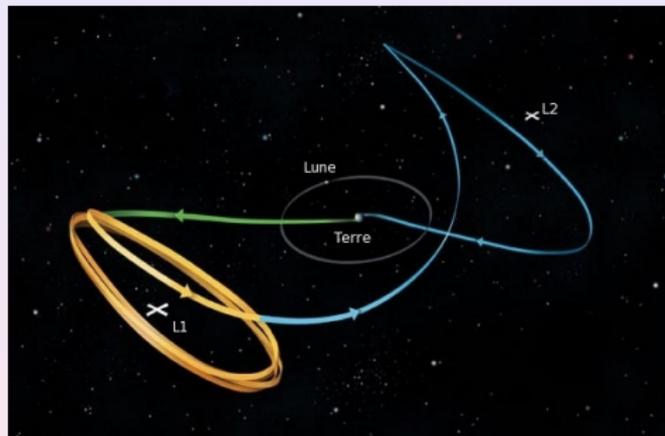
(b) orbites de halo

(voir Richardson 1980, Gomez Masdemont Simo 1997 1998)

Exemples d'utilisation d'orbites de halo :



Orbite de Soho autour de L1



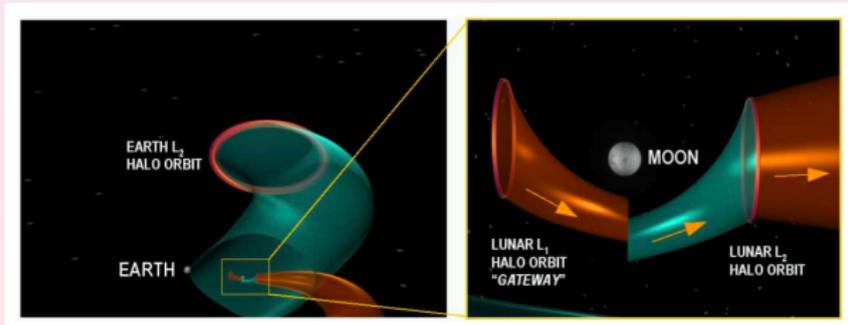
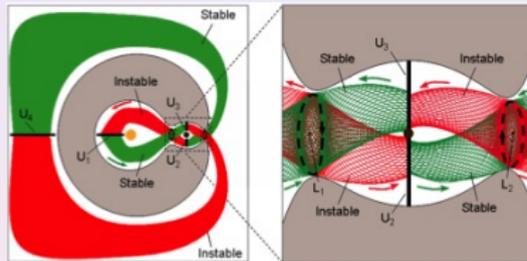
Orbite de la sonde Genesis (2001–2004)

(requiert du contrôle par stabilisation)

Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques :
tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbf{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5.
(jouent le rôle de séparatrices)

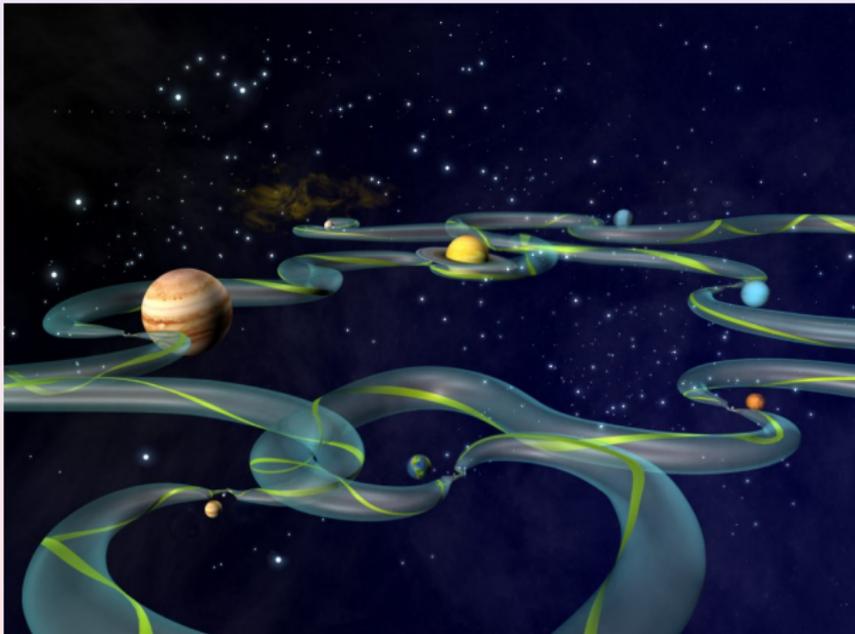
→ "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" ⇒ trajectoires gratuites



Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques : tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbf{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5. (jouent le rôle de séparatrices)

→ "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" ⇒ trajectoires gratuites



V

Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques :
tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbf{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5.
(jouent le rôle de séparatrices)

→ "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" ⇒ trajectoires gratuites



Cartographie ⇒ missions interplanétaires à bas coût

En attendant...



Retour sur la Lune

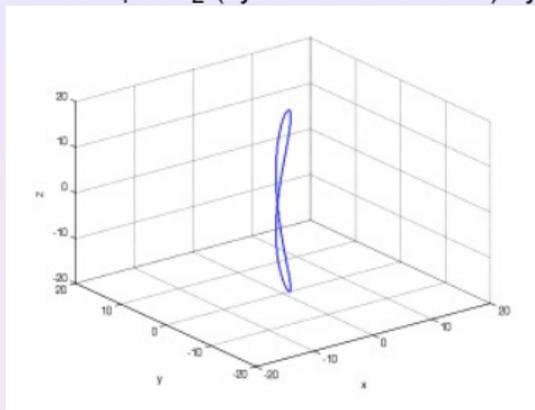
⇒ base lunaire : point intermédiaire pour des missions interplanétaires

D'où la nécessité de construire des orbites (les plus économiques possibles) survolant l'ensemble de la surface de la Lune.

Orbites de Lissajous en 8

(thèse de G. Archambeau)

Orbites périodiques autour de L_1 et L_2 (système Terre-Lune) ayant la forme d'un 8 :

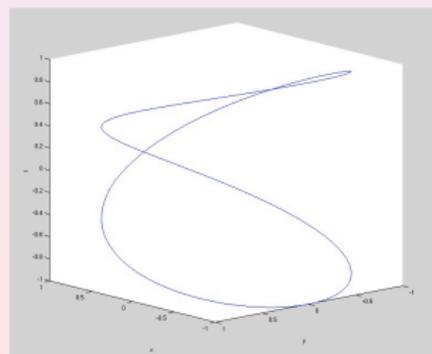


Elles sont difféomorphes à la courbe paramétrique 3D :

$$x(t) = \cos(2t)$$

$$y(t) = \sin(2t)$$

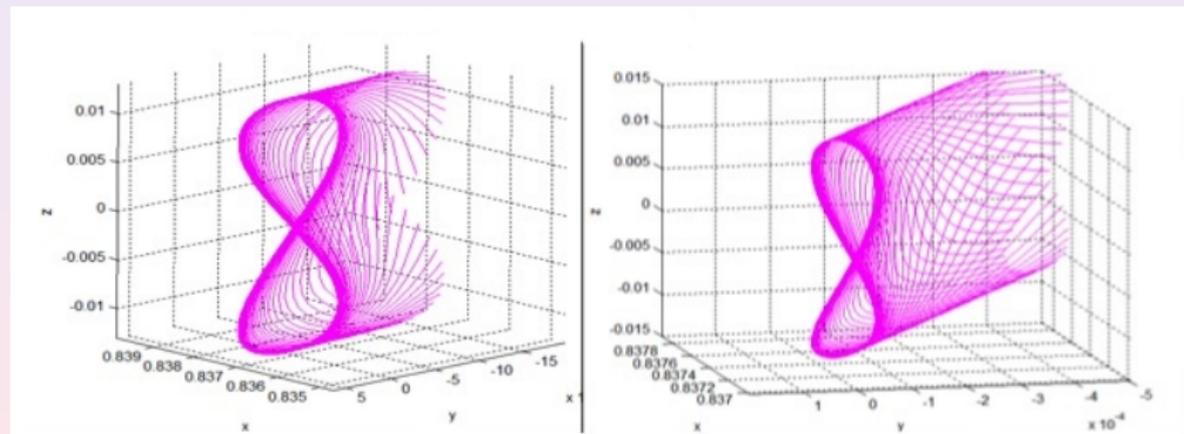
$$z(t) = \sin(t)$$



Variétés invariantes des orbites en 8

En tout point P de l'orbite, on calcule les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice de monodromie qui sont < 1 et > 1 , puis on propage $X_0 = P + \epsilon V(P)$.

⇒ Tubes en forme de 8 :

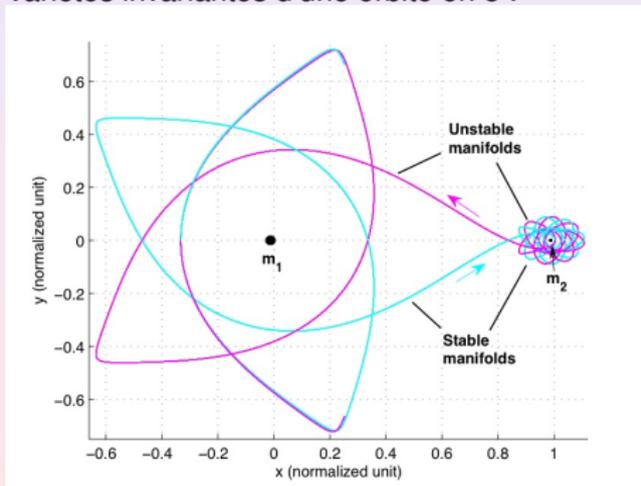


Variétés invariantes des orbites en 8

On observe numériquement deux bonnes propriétés :

1) Stabilité en temps long des variétés invariantes

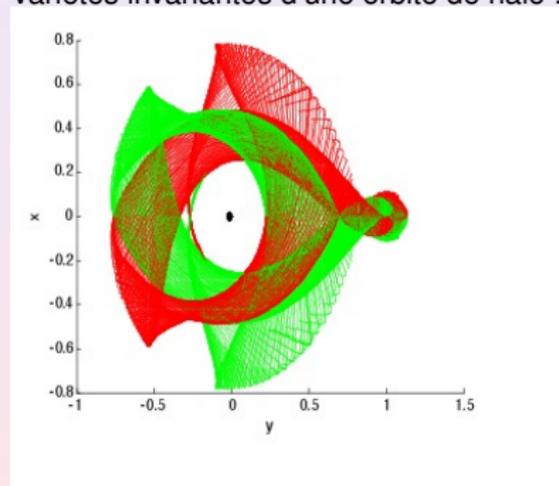
Variétés invariantes d'une orbite en 8 :



→ structure globale conservée

(vérification numérique par calcul d'exposants de Lyapunov locaux)

Variétés invariantes d'une orbite de halo :



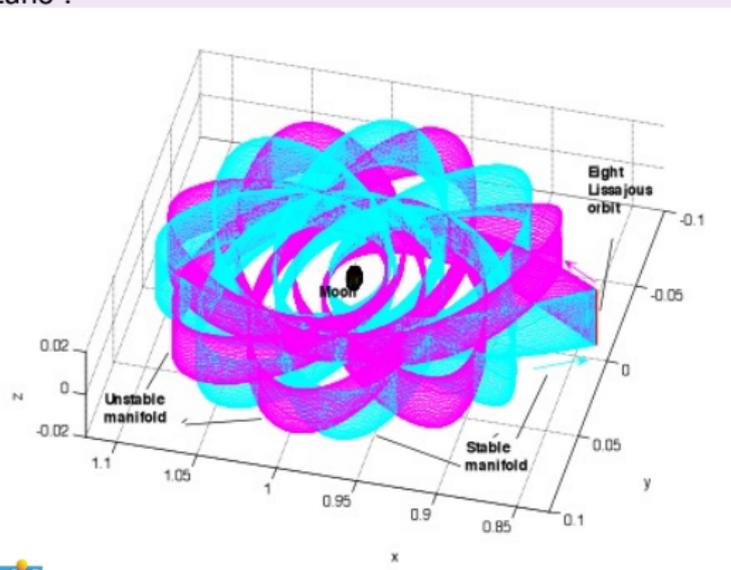
→ structure chaotique en temps long

Variétés invariantes des orbites en 8

On observe numériquement deux bonnes propriétés :

2) Survol de la quasi-totalité de la surface de la Lune

Variétés invariantes d'une orbite en 8, autour de la Lune :



- oscillations autour de la Lune
- stabilité globale en temps long
- distance minimale à la Lune : 1500 km.

Perspectives

- Mission design utilisant les bonnes propriétés des orbites de Lissajous en 8, ou d'autres orbites
- Optimisation pluridisciplinaire :
 - missions interplanétaires : compromis entre bas coût et temps de parcours long ; effets gravitationnels (swing-by)
 - dimensionnement de véhicules spatiaux
 - ramassage des débris spatiaux
 - problèmes d'optimal design (conception de véhicules, capteurs)
- Problèmes inverses : reconstruction d'environnement thermique, acoustique, électromagnétique
- Problèmes de robustesse

Variétés invariantes d'orbites de Lissajous en 8

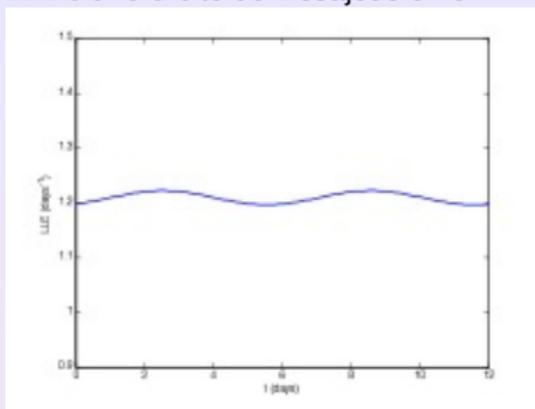
$\Phi(\cdot, t)$: matrice de transition le long d'une trajectoire $x(\cdot)$ de référence.
 $\Delta > 0$.

Exposant de Lyapunov local

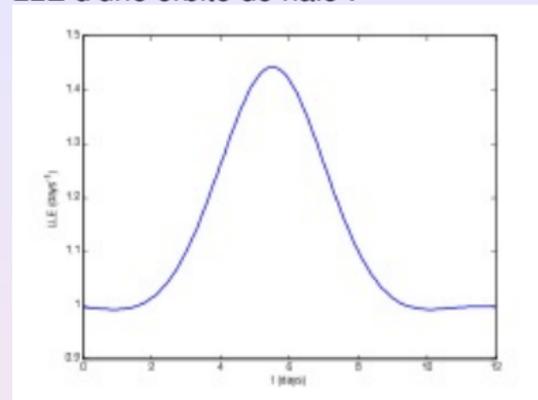
$$\lambda(t, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \ln \left(\text{valeur propre maximale de } \sqrt{\Phi(t + \Delta, t)\Phi^T(t + \Delta, t)} \right)$$

Simulations avec $\Delta = 1$ jour.

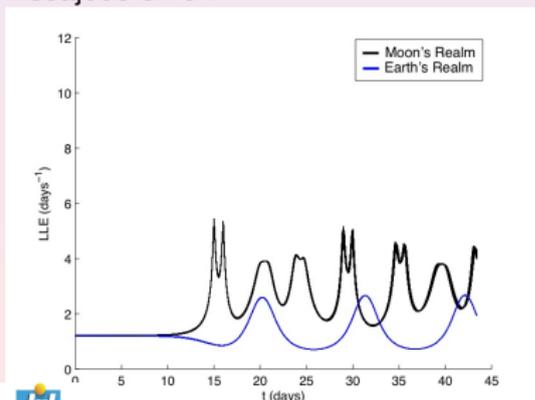
LLE d'une orbite de Lissajous en 8 :



LLE d'une orbite de halo :



LLE d'une variété invariante d'orbite de Lissajous en 8 :



LLE d'une variété invariante d'orbite de halo :

